2021 年 11 月 17 日に web 公開したもの

数学演習 IIA-6 回目：補充問題の略解：線型写像

$\boxed{4}$ (1) $\underline{\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f = \{0\}\ \text{の証明}}$: $v \in \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f$ とする。$v \in \mathrm{Im}f$ なので、ある $v' \in V$ が存在して、$v = f(v')$ となる。一方で、$v \in \mathrm{Ker}f$ なので、$0 = f(v) = f \circ f(v) = f(v') = v$.

(2) $\underline{V = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f\ \text{の証明}}$: $v \in V$ とする。$v' = f(v), v'' = v - v'$ とする。$f(v'') = f(v - v') = f(v) - f(v') = f(v) - f(f(v)) = f(v) - f(v) = 0$ なので、$v'' \in \mathrm{Ker}f$ である。したがって、$v = v' + v'' \in \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f$ である。

$\boxed{5}$ $f : V \to V'$ を線型写像とする。

(1-1) $\underline{f(f^{-1}(W')) \subset W' \cap \mathrm{Im}f\ \text{の証明}}$: $v' \in f(f^{-1}(W'))$ とする。$v' = f(v)$ となるような $v \in f^{-1}(W')$ が存在する。このとき、$v' = f(v) \in W'$ である。また、$v' = f(v) \in f(V) = \mathrm{Im}f$ である。

(1-2) $\underline{f(f^{-1}(W')) \supset W' \cap \mathrm{Im}f\ \text{の証明}}$: $w' \in W' \cap \mathrm{Im}f$ とする。このとき、$w' = f(v)$ となるような $v \in V$ が存在する。$f(v) = w' \in W'$ ゆえ $v \in f^{-1}(W')$ である。したがって、$w' = f(v) \in f(f^{-1}(W'))$ である。

(2-1) $\underline{f^{-1}(f(W)) \supset W + \mathrm{Ker}f\ \text{の証明}}$: まず、$w \in W$ とすると、$f(w) \in f(W)$ なので、$w \in f^{-1}(f(W))$ である。つまり、$W \subset f^{-1}(f(W))$ が示せた。次に、$\mathrm{Ker}f = f^{-1}(0) \subset f^{-1}(f(W))$ である。最後に、$f^{-1}(f(W))$ は V の部分空間である。したがって、$W + \mathrm{Ker}f \subset f^{-1}(f(W))$ である。

(2-2) $\underline{f^{-1}(f(W)) \subset W + \mathrm{Ker}f\ \text{の証明}}$: $v \in f^{-1}(f(W))$ とする。$f(v) \in f(W)$ なので、$f(v) = f(w)$ となるような $w \in W$ が存在する。$v' = v - w$ と定義する。このとき、$f(v') = f(v) - f(w) = 0$ なので $v' \in \mathrm{Ker}f$ である。したがって、$v = w + v' \in W + \mathrm{Ker}f$ である。

コメント：

- 解答の (1-1),(2-1) では、それぞれが部分集合になっていることを示すのがポイントである。
- 一方で、(1-2),(2-2) では与えられたデータに対して、2 つのデータの組み合わせを与える必要があるが、抽象的な存在ではなくて上の解答のように具体的に与えてしまう方がわかりやすい。直接の関係はないが、問題 $\boxed{4}$(2) でも一つの入力データに対して 2 つのデータを具体的に与えている、という点で共通の構造が見られる。

$\boxed{6}$ $D(f) = xf'' - f'$ と定義する。$f \in C^2(\mathbb{R})$ が $D(f) = 0$ を満たすならば、f は 2 次以下の多項式であることを示せ。

コメント: 問題 $\boxed{4}$ の定義域を広げても核は増えないことを示す問題である。以下の解答は線形代数ではなく、変数分離形の微分方程式の最も最初で学習する内容を、微分積分の範囲の言葉に置き換えたものである。

解答：$g = f'$ とする。$g \in C^1(\mathbb{R})$ である。$xg' = g$ である。次の補題より、ある定数 A が存在して、$g(x) = Ax$ である。$k(x) = f(x) - \frac{1}{2}Ax^2$ と定義すると、$k'(x) = f'(x) - Ax = g(x) - Ax = 0$ である。したがって、k は定数 C である。つまり、$f(x) = \frac{1}{2}Ax^2 + C$ となり、f が 2 次以下の多項式であることが示せた。証明終わり。

補題:$g \in C^1(\mathbb{R})$ が $xg' = g$ を満たすとする。このとき、ある定数 A が存在して、$g(x) = Ax$ である。

補題の証明：$h = g/x$ と定義する。h は $x \neq 0$ で定義されている C^1 級の関数である。商の微分法より、$h' = \dfrac{g'x - g}{x^2} = 0$ である。したがって、h は定数である。ただし、h は $x \neq 0$ で定義されているので、2 つの定数 A, B が存在して、$x > 0$ で $h(x) = A$, $x < 0$ で $h(x) = B$ となる。したがって、$x > 0$ で $g(x) = Ax$, $x < 0$ で $g(x) = Bx$ となる。この状況のもとで $x = 0$ における微分係数を考えると $A = g'_+(0) = g'(0) = g'_-(0) = B$ となる。すなわち、$x \neq 0$ で $g(x) = Ax$ である。g の連続性より $x \in \mathbb{R}$ で $g(x) = Ax$ である。補題の証明終わり。