

2021 年 11 月 17 日配布

数学演習 IIA-6 回目：線型写像

1 \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^2 への次の写像は線型写像になるかならないかを答えよ。

$$(1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - z \\ x + y + z \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - 1 \\ x + 1 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 + z^2 \end{pmatrix}, \quad (4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |y| \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2 V を 3 次以下の多項式全体のなす線形空間、 V' を 2 次以下の多項式全体のなす線形空間とする。

$$(Df)(x) = x \frac{d^2 f}{dx^2}(x) - \frac{df}{dx}(x)$$

と定める。つまり $D(f) = xf'' - f'$ 。

(1) $D : V \rightarrow V'$ は線型写像であることを示せ。

(2) D の核と像を求めよ。

3 V を 2 次正方行列全体のなす線形空間とする。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ とする。} f(X) = PX - XP \text{ とする。}$$

(1) $f : V \rightarrow V$ は線型写像であることを示せ。

(2) f の核と像を求めよ。

● 補足

1 p165 例題 6.1 の類題, 2 p167 練習問題 6.4(2)(3) の類題。 3 p166 練習問題 6.2 の類題。

2 (2) どのような単項式の線型結合で書けるかがわかるように答えよ。

3 (2) 核は外延的記法 (つまり、要素を書き並べる方法) で答えよ。

像は内包的記法 (つまり、条件で書き表す方法) で答えよ。