2021 年 12 月 1 日配布

数学演習 IIA-8 回目略解：表現行列、固有値

$\boxed{1}$ (1) 例えば

$$Tx^3 = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2$$

のような計算をする。他も $T(1) = 0$, $T(x) = 1$, $T(x^2) = 2x + h$ となるので、

$$\begin{pmatrix} T(1) & T(x) & T(x^2) & T(x^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & h & h^2 \\ 0 & 0 & 2 & 3h \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

この最後の行列が A である。

(2) $\begin{pmatrix} 1 & x & (x-h)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ここに現れた行列が Q である。

(3) $\begin{pmatrix} 1 & x & (x-h)x & (x-2h)(x-h)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h & 2h^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ここに現れた行列が P である。

(4) $B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & h & h^2 \\ 0 & 0 & 2 & 3h \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h & 2h^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ (1) $W(3) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W(-2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $W(2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W(1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W(2k) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ k \end{pmatrix}$.

ただし、$k = 1$ の場合は修正が必要[*1]で、$W(2) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ k \end{pmatrix})$ となり、

この場合だけ 2 次元になる。

[*1] 一方、$k = \frac{1}{2}$ の時は、$W(1) = W(2k)$ がたまたま一致しているので、上の解答のままで変更しないで済む、たまたま。補足：なお、$k = \frac{1}{2}$ の場合は、行列 B は対角化可能ではない。従って、$\dim W(2) + \dim W(1) = 1 + 1 < 3$ となっている。

$\boxed{3}$ (1) $\mathrm{rank}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim g(f(V)) \leq \dim g(V') = \dim \mathrm{Im}(g) = \mathrm{rank}(g)$.

(2) 次元定理を用いると $\dim W = \dim \mathrm{Ker} h + \dim \mathrm{Im} h \geq \dim \mathrm{Im} h = \dim h(W)$ となる。

(3) $\mathrm{rank}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim g(f(V)) \leq \dim f(V) = \dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rank}(f)$. ただし、途中の不等式は、(2) を $g : f(V) \to V''$ に適用している。