2021 年 12 月 1 日配布

数学演習 IIA-8 回目：表現行列、固有値

$\boxed{1}$ [表現行列と基底変換] 定数 $h > 0$ を固定する。V を 3 次以下の多項式のなす線形空間、V' を 2 次以下の多項式のなす線型空間とする。線型写像 $T : V \to V'$ を

$$(Tf)(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と定義する。

(1) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \{1, x, x^2, x^3\}$ を V の基底、$\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\} = \{1, x, x^2\}$ を V' の基底とする。基底 $\{\mathbf{u}_j\}$ と基底 $\{\mathbf{u}'_i\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ。

(2) 基底 $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ から基底 $\{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\} = \{1, x, (x-h)x\}$ を作る変換行列 Q を求めよ。

(3) 基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ から基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} = \{1, x, (x-h)x, (x-2h)(x-h)x\}$ を作る変換行列 P を求めよ。

(4) 基底 $\{\mathbf{v}_j\}$ と基底 $\{\mathbf{v}'_i\}$ に関する T の表現行列 B を求めよ。

$\boxed{2}$ [固有値と固有空間の計算] 次の行列の固有値と対応する固有空間を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k-1 & k & k-1 \\ k-1 & k & k+1 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ [階数の性質] 次を示せ。

(1) 線型写像 $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ に対して $\mathrm{rank}(g \circ f) \leq \mathrm{rank}(g)$ を示せ。

(2) 線型写像 $h : W \to W'$ に対して、$\dim \mathrm{Im} h \leq \dim W$ を示せ。

(3) 線型写像 $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ に対して $\mathrm{rank}(g \circ f) \leq \mathrm{rank}(f)$ を示せ。

- ヒント

$\boxed{1}$ (1)p188 練習問題 6.13, p181 例 6.16 の類題。(4) p184, 定理 6.8 の具体計算。

$\boxed{2}$ §6.4 の計算問題。練習問題 6.18, 6.20 の類題。

$\boxed{3}$ p189 練習問題 6.17。p185 定理 6.9 などの応用。(1)(3) では $\mathrm{rank}(f) = \dim \mathrm{Im} f$ を用いて良い。(2) では p169 系 6.2 の次元定理を用いて良い。

$\boxed{1}$ (1) 例えば

$$Tx^3 = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2$$

のような計算をする。他も $T(1) = 0$, $T(x) = 1$, $T(x^2) = 2x + h$ となるので、

$$\begin{pmatrix} T(1) & T(x) & T(x^2) & T(x^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & h & h^2 \\ 0 & 0 & 2 & 3h \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

この最後の行列が A である。

(2) $\begin{pmatrix} 1 & x & (x-h)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ここに現れた行列が Q である。

(3) $\begin{pmatrix} 1 & x & (x-h)x & (x-2h)(x-h)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h & 2h^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ここに現れた行列が P である。

(4) $B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & h & h^2 \\ 0 & 0 & 2 & 3h \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h & 2h^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ (1) $W(3) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W(-2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $W(2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W(1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W(2k) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ k \end{pmatrix}$.

補足：なお、$k = \frac{1}{2}$ の場合は、行列 B は対角化可能ではない。従って、$\dim W(2) + \dim W(1) = 1 + 1 < 3$ となっている。

$\boxed{3}$ (1) $\mathrm{rank}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim g(f(V)) \leq \dim g(V') = \dim \mathrm{Im}(g) = \mathrm{rank}(g)$.

(2) 次元定理を用いると $\dim W = \dim \mathrm{Ker} h + \dim \mathrm{Im} h \geq \dim \mathrm{Im} h = \dim h(W)$ となる。

(3) $\mathrm{rank}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim g(f(V)) \leq \dim f(V) = \dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rank}(f)$. ただし、途中の不等式は、(2) を $g : f(V) \to V''$ に適用している。