# 線形代数学・同演習A 期末テスト　（7月28日実施）

$\boxed{1}$ 次の連立1次方程式について以下の問いに答えよ．ただし $a$ は定数である．(20点)

$$\begin{aligned} x+y-z&=1\\ 2x+3y+az&=3\\ x+ay+3z&=2 \end{aligned}$$

(1) 解がただ一つであるための $a$ についての条件を求めよ．

(2) 解を複数個あるための $a$ についての条件を求め，その場合の解を全て求めよ．

[**解答**] (1) 拡大係数行列の簡約化の操作を（途中まで）行うと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & -(a-2) \end{pmatrix}$$

ここで $a \neq 2,-3$ のとき，$a=2$，$a=-3$ のときに分けて考える必要がある．結果としては $a \neq 2,-3$ のとき解がただ一つ定まる，$a=2$ のとき解は複数個存在し，$a=-3$ のとき解は存在しない．従って (1) の答えは $a \neq 2,-3$．(2) の答えは $a=2$ で，解は $(x,y,z)=(1+5c,1-4c,c)$.

$\boxed{2}$ 行列式の定義についての次の問に答えよ．(20点)

(1) 次の置換の符号を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \end{vmatrix}$$

[**解答**] (1) 符号は $-1$, (2) 行列式は定義から $-1 \times 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 = -1024$.

$\boxed{\mathbf{3}}$　次の行列式の値を計算せよ．(20 点)

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 9 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} 999 & 1000 & 1001 & 1002 \\ 1000 & 1001 & 1002 & 999 \\ 1001 & 1002 & 999 & 1000 \\ 1002 & 999 & 1000 & 1001 \end{vmatrix}$

(Hint: 行列式の性質を使って計算する．(a) は右下の 0 のかたまり，(b) は各列の数字の和が 4002 になることに注目する．)

[**解答**](a) 15 (b) 64032

$\boxed{\mathbf{4}}$　次の行列 $A$ について問に答えよ．(20 点)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の行列式の値と余因子行列を求めよ．

(2) 逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(Hint: (2) は (1) を使えば簡単のはず．)

[**解答**] (1) 行列式は $adf$, 余因子行列は

$$\begin{pmatrix} df & -bf & be - cd \\ -0 & af & -ae \\ 0 & 0 & ad \end{pmatrix}$$

(2)

$$A^{-1} = \frac{1}{adf} \begin{pmatrix} df & -bf & be - cd \\ -0 & af & -ae \\ 0 & 0 & ad \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$　次の行列式について問に答えよ．(20 点)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

(1) 第 1 行について余因子展開せよ．

(2) 行列式の値を求めよ．

[**解答**] (1)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) 6.