

学生番号

氏名

1 次の関数が調和関数になるように正の定数  $a > 0$  を定めよ.

$$u(x, y) = e^{ay} \cos(2x)$$

また、求めた  $a$  の値についての  $u(x, y)$  について、その共役調和関数  $v(x, y)$  がみたすべき方程式を書き下し、 $v$  を求めよ.

[解答] ラプラス作用素  $\Delta = \nabla^2$  を  $u(x, y)$  に作用させると

$$\Delta u(x, y) = (\partial^2/\partial x^2)u(x, y) + (\partial^2/\partial y^2)u(x, y) = -4e^{ay} \cos(2x) + a^2 e^{ay} \cos(2x)$$

であるので、 $u$  が調和関数であるためには、 $a^2 = 4$  が必要十分。  $a > 0$  としているので  $a = 2$ .  
共役調和関数を  $v$  とすると、コーシーリーマンの方程式から

$$\partial v/\partial x = -\partial u/\partial y = 2e^{2y} \cos(2x), \quad \partial v/\partial y = \partial u/\partial x = -2e^{2y} \sin(2x).$$

例えば  $(0, 0)$  を基準点として、 $(0, 0)$  と  $(x, y)$  を結ぶ曲線を  $\gamma$  とすると

$$v(x, y) = \int_{\gamma} \nabla v \cdot d\mathbf{x} + v(0, 0)$$

である。特に  $\gamma$  を  $(0, 0) \rightarrow (x, 0) \rightarrow (x, y)$  という折れ線として考えると

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_0^x \partial v/\partial x(t, 0) dt + \int_0^y \partial v/\partial y(x, t) dt \\ &= 2 \int_0^x \cos(2t) dt - 2 \int_0^y e^{2t} \sin(2x) dt = -\sin(2x) - e^{2y} \sin(2x) + \sin(2x) = -e^{2y} \sin(2x) \end{aligned}$$

よって共役調和関数は  $v(x, y) = -e^{2y} \cos(2x) + \text{定数}$ . (共役調和関数は定数を除いて一意に定まる.)

注意: ちなみに対応する解析関数は

$$f(z) = e^{2iz}.$$