数学 2 B　　小テスト　　No.8　　(6/19)

学生番号　　　　　　　　　　氏名

$\boxed{1}$　1 次分数変換 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ で次の条件をみたすものを求めよ.

$$f(-1) = 1, \qquad f(0) = -1, \qquad f(1) = \infty.$$

ただし、$f(x) = (ax + b)(cx + d)$ の形で答えること.

[解答] 次の等式を w について解く.（教科書の解法を参照.）

$$\frac{(w-1)((-1)-\infty)}{(w-\infty)((-1)-1)} = \frac{(z-(-1))(0-1)}{(z-1)(0-(-1))}$$

ただし（講義中に説明したように）左辺は ∞ を含む項を約分して

$$\frac{w-1}{(-1)-1} = \frac{(z-(-1))(0-1)}{(z-1)(0-(-1))}$$

と考える．答えは

$$f(z) = \frac{3z+1}{z-1}.$$

数学 2 B　　小テスト　　No.9　　(7/2)

学生番号　　　　　　　　　　氏名

$\boxed{1}$　1 次分数変換 $f(z) = \dfrac{iz+1}{iz-1}$ について以下の集合の像を求めよ．

(1) 虚軸

(2) 単位円板 $|z| < 1$

(3) 原点を通る半直線 $\arg(z) = \theta$.

[解答]　円円対応と等角性を用いて考える．(図は入力が難しいため省略する．)

(1) 実軸 $\mathbb{R}$ と ∞ をあわせた一般化された円から 1 を除いたもの．(虚軸と ∞ をあわせた集合は一般化された円であり、その像は $f(-i) = \infty$, $f(i) = 0$, $f(\infty) = 1$ を通る一般化された円になる．)

(2)　虚軸の左側 $\{\mathrm{Im}z < 0\}$ になる．(単位円の像は $f(i) = 0$, $f(-i) = \infty$ で実軸に直交する一般化された円になる．よってそれは虚軸になる．単位円板の像はその右か左の領域であるが，$f(0) = -1$ より左側であることがわかる．)

(3) もとの半直線は 0 と ∞ を通り，虚軸と角度 $(\pi/2) - \theta$ で交わる一般化された円の一部であるので，像は $-1 = f(0)$ と $1 = f(\infty)$ を通り，単位円周と -1 において $(\pi/2) - \theta$ の角度をなす円の一部になる．(より正確には 1 と -1 を端点とする 2 つの弧のうち一方になる．どちらになるかは図を書いて考えれば明らかなはず．)

数学 2 B　　小テスト　　No.10　　(7/9)

学生番号　　　　　　　　　　氏名

$\boxed{1}$　上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 上の調和関数 $\Phi(z)$ で，実軸上で次の境界条件をみたすものを求めよ．

$$\Phi(x) = \begin{cases} +10, & -1 < x < 1 \text{ の場合;} \\ 0, & x < -1 \text{ または } x > 1 \text{ の場合.} \end{cases}$$

また，このとき $\Phi(z) =$ 一定 と表される曲線はどのような曲線になるか？　特に曲線が i を通る場合の図を描け．

[解答]　前回の講義で述べたことから $\Phi(z) = a\mathrm{Arg}\,(z-1) + b\mathrm{Arg}\,(z+1) + c$ の形になる．そこで a, b を

$$a\pi + b\pi + c = 0, \qquad a\pi + c = +10, \qquad c = 0$$

を満たすように選べば良い．解は $a = 10/\pi$, $b = -10\pi$, $c = 0$ であって

$$\Phi(z) = (100/\pi)(\mathrm{Arg}\,(z-1) - \mathrm{Arg}\,(z+1)).$$

結局

$$\mathrm{Arg}\,(z-1) - \mathrm{Arg}\,(z+1) = \text{一定}$$

という曲線であるが、左辺は $+1$, z, -1 を順に結んでできる折れ線のなす角となり、円周角の定理から求める曲線は ± 1 を通る円（の一部）であることがわかる．

数学 2 B　　小テスト　　No.11　　(7/17)

学生番号　　　　　　　　　　　　氏名

$\boxed{1}$

(1) 1 次分数変換

$$f(z) = (1+i)\cdot\frac{z-1}{z-i}$$

は単位円 $|z| < 1$ をどのような図形に移すか? (ヒント：± 1 と i の像を調べよ．)

(2) 単位円上の調和関数 $u(z)$ で次の境界条件をみたすものを求めよ.

$$u(e^{i\theta}) = \begin{cases} +100, & (0 < \theta < \pi/2); \\ 0, & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

(3) 上で求めた u の等ポテンシャル線と力線を描け.

[解答] (1) $f(1) = 0$, $f(-1) = 2$, $f(i) = \infty$ である．単位円周は $1, -1, i$ を通る一般化された円であるので、円円対応から、像は $0, 2, \infty$ を通る一般化された円、すなわち実軸と ∞ をあわせた集合になる．さらに $f(0) = (1+i)/i = -i+1$ より f による単位円盤の像は下半平面 $\mathrm{Im}\, z < 0$ になる．

(2) (1) で求めた 1 次分数変換 f によって、問題は下半平面上の調和関数 Φ で境界条件

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \text{ のとき}, \\ 100, & x < 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

をみたすものを見つけることに帰着される．そのような Φ は

$$\Phi(z) = -\frac{100}{\pi}\mathrm{Arg}(z)$$

になることがわかる．よって求める関数は

$$u(z) = \Phi(f(z)) = -\frac{100}{\pi}\mathrm{Arg}((1+i)(z-1)/(z-i))$$

注意: ここで

$$\mathrm{Arg}((1+i)(z-1)/(z-i)) = \mathrm{Arg}(1+i) + \mathrm{Arg}(z-1) - \mathrm{Arg}(z-i)$$

としてはいけない．主値 Arg の不連続性から統合は一般に成り立たない.

(3) はまず Φ の等ポテンシャル線と力線を描き、それらの 1 次分数変換 f による逆像を考えれば良い.（円円対応を使えば逆像は簡単に求まる.）図は省略.