

学生番号

氏名

1 (1) 上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ 上の調和関数 $\Phi^*(z)$ で次の境界条件を満たすものを求めよ.

$$\Phi^*(x) = \begin{cases} 1, & (|x| < 1); \\ 0, & (|x| > 1). \end{cases}$$

(2) 角領域 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0, \text{Re}(z) > 0\}$ 上の調和関数 Φ で次の境界条件を満たすものを求めよ.

$$\Phi(x + iy) = \begin{cases} 1, & (x = 0 \text{ かつ } 0 \leq y < 1); \\ 1, & (y = 0 \text{ かつ } 0 \leq x < 1); \\ 0, & (\text{その他.}) \end{cases}$$

(ヒント : (1) を利用する. $z \mapsto z^2$ を考えよ.)

[解答] (1) これは No.9 (2) と同じ問題.

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{2} (\text{Arg}(z - 1) - \text{Arg}(z + 1))$$

(2) 求める関数は $\Phi(z) = \Phi^*(z^2)$ として得られる.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} (\text{Arg}(z^2 - 1) - \text{Arg}(z^2 + 1))$$