

学生番号

氏名

- 1 次関数が調和関数であることを確かめよ。また、その共役調和関数を求めよ。

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

[解答] ラプラス作用素 $\Delta = \nabla^2$ を作用させると

$$\Delta f(x, y) = (\partial^2/\partial x^2)f(x, y) + (\partial^2/\partial y^2)f(x, y) = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

であるので、 f は調和関数である。共役調和関数を g とすると、コーシーリーマンの方程式から

$$\partial g/\partial x = -\partial f/\partial y = -e^x \cos y, \quad \partial g/\partial y = \partial f/\partial x = e^x \sin y$$

例えば $(0, 0)$ を基準点として、 $(0, 0)$ と (x, y) を結ぶ曲線を γ とすると

$$g(x, y) = \int_{\gamma} \nabla g \cdot d\mathbf{x}$$

である。特に γ を $(0, 0) \rightarrow (x, 0) \rightarrow (x, y)$ という折れ線として考えると

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_0^x \partial g/\partial x(t, 0) dt + \int_0^y \partial g/\partial y(x, t) dt \\ &= -\int_0^x e^t dt + \int_0^y e^x \sin t dt = 1 - e^x \cos y \end{aligned}$$

よって共役調和関数は $g(x, y) = 1 - e^x \cos y = -e^x \cos y + \text{定数}$ 。(共役調和関数は定数を除いて一意に定まる。)