微分積分学　小テスト　No.5　(5/21)

学生番号　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　$x \geq 0$ について次を示せ．

$$x - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^3 + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^5$$

また，このことを使って $\sin(0.1)$ を小数点以下 6 桁まで求めよ．

[**解答**] $f(x) = x - x^3/6 + x^5/120 - \sin x$ とおくと簡単な計算で

$$f'(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 - \cos x, \quad f''(x) = -x + x^3/6 + \sin x, \quad f'''(x) = -1 + x^2/2 + \cos x$$

$$f^{(4)}(x) = x - \sin x, \quad f^{(5)}(x) = 1 - \cos x.$$

特に $x = 0$ での値は

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$$

である．

最初に $x \geq 0$ で $f^{(5)}(x) \geq 0$ であることと定理 5 から $f^{(4)}(x)$ が $x \geq 0$ の範囲で増加関数であることがわかる． $f^{(4)}(0) = 0$ であるので，$x \geq 0$ で $f^{(4)}(x) \geq 0$ であることがわかる．

同様にして順に「$x \geq 0$ で $f'''(x) \geq 0$」，「$x \geq 0$ で $f''(x) \geq 0$」，「$x \geq 0$ で $f'(x) \geq 0$」，「$x \geq 0$ で $f(x) \geq 0$」であることを順に示すことができる．最後は問題の右側の不等式を示している．(左側の不等式の証明も同様.)

最後の評価は

$$(0.1) - (0.1)^3/6 = 0.099833333...$$

で

$$(0.1)^5/120 < (0.1)^7$$

であることから，$0.09983333... < \sin x < 0.0998335$. 答えは 0.099833.