微分積分学　　小テスト　　No.6　　(5/28)

学生番号　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ (1) 対数関数 $f(x) = \log x$ が強い意味で上に凸であることを示せ．
(2) p, q は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたす正の実数とする．正の数 α, β について次の不等式を示せ．

$$\alpha^{1/p}\beta^{1/q} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}.$$

また等号が成り立つのはどのような場合か？（ヒント：両辺の対数をとり，(1) を使う.）

[解答] (1) $x > 0$ の範囲で $f''(x) = -x^{-2} < 0$ であるので，f はその範囲で強い意味で上に凸な関数である．
(2) 両辺の対数をとって

$$\frac{1}{p}\log\alpha + \frac{1}{q}\log\beta \leq \log\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}\right)$$

を示せばよい．　（$\alpha = \beta$ のときは不等式は証明すべきことは明らかなので $\alpha \neq \beta$ とすると）(1) で示した $\log x$ が強い意味で上に凸であるという条件は

$$t\log\alpha + (1-t)\log\beta < \log(t\alpha + (1-t)\beta) \qquad (0 < t < 1)$$

と書き表すことができる．$t = 1/p$ とおくと，仮定から $(1-t) = 1/q$ かつ $0 < t < 1$ であるので，この場合が上の不等式である．　またこの議論から等号が成立するのは $\alpha = \beta$ の場合のみであることがわかる．