

学生番号

氏名

1 次の問に答えよ.

(1) 領域 $1 < |z| < 2$ 上の調和関数 $\Phi(z)$ で, 次の境界条件をみたすものを求めよ.

$$\Phi(z) = \begin{cases} 100, & |z| = 1 \text{ の場合;} \\ 0, & |z| = 2 \text{ の場合.} \end{cases}$$

(2) 上半平面 $\mathbb{H} = \{\text{Im}z > 0\}$ 上の調和関数 $\Psi(z)$ で次の境界条件を満たすものを求めよ.

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1 \text{ の場合;} \\ 0, & x < -1 \text{ または } x > 1 \text{ の場合.} \end{cases}$$

(ヒント : $\Psi(z) = a \cdot \text{Arg}(z-1) + b \cdot \text{Arg}(z+1) + c$ とおいて a, b, c と適当に定めよ.)

[解答]

(1) 前回の講義から $\Phi(z) = a \log |z| + b$ の形になる. そこで a, b を

$$a \log 1 + b = 100, \quad a \log 2 + b = 0$$

を満たすように選べば良い. 具体的には $a = -100/\log 2, b = 100$ として

$$\Phi(z) = -\frac{100}{\log 2} \cdot \log |z| + 100.$$

(2) Ψ がヒントで書いた形であるとする a, b, c についての条件は

$$c = 0, \quad \pi a + c = 1, \quad \pi a + \pi b + c = 0$$

なので

$$a = 1/\pi, \quad b = -1/\pi, \quad c = 0.$$

よって,

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \text{Arg}(z-1) - \frac{1}{\pi} \cdot \text{Arg}(z+1)$$