数学２Ｂ　　小テスト　　No.1　　(4/21)

学生番号　　　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　次の値（複素数）を求めて，複素平面上に図示せよ．

$(a)\ \left(\dfrac{6+8i}{4-3i}\right)^2$　　　$(b)\ \sqrt[4]{-4}$　（これは $z^4 = -4$ の４つの解を表す．）

[**解答**] (a) 絶対値については

$$\left|\left(\frac{6+8i}{4-3i}\right)^2\right| = \frac{|6+8i|^2}{|4-3i|^2} = 4$$

偏角については $\tan\theta = 4/3$ なる角 θ をとると

$$\arg\left(\frac{6+8i}{4-3i}\right)^2 = 2(\arg(6+8i) - \arg(4-3i)) = 2\{\theta - -(\theta - \pi/2)\} = \pi.$$

よって

$$\left(\frac{6+8i}{4-3i}\right)^2 = -4.$$

(b) $z^4 = -4$ は

$$|z^4| = |z|^4 = 4, \qquad \arg(z^4) = 4\arg z = \pi + 2\pi n$$

と同値であるので

$$|z| = 1, \qquad \arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}.$$

つまり,

$$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

(図は省略.)

数学２B　　小テスト　　No.2　　(4/28)

学生番号　　　　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　次の関数が調和関数である事を確かめよ．また，その共役調和関数を求めよ．

$$f(x,y) = e^x \sin y$$

[**解答**] ラプラス作用素 $\Delta = \nabla^2$ を作用させると

$$\Delta f(x,y) = (\partial^2/\partial x^2)f(x,y) + (\partial^2/\partial y^2)f(x,y) = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

であるので，f は調和関数である．共役調和関数を g とすると，コーシーリーマンの方程式から

$$\partial g/\partial x = -\partial f/\partial y = -e^x \cos y, \quad \partial g/\partial y = \partial f/\partial x = e^x \sin y$$

例えば $(0,0)$ を基準点として，$(0,0)$ と (x,y) を結ぶ曲線を γ とすると

$$g(x,y) = \int_\gamma \nabla g \cdot d\mathbf{x}$$

である．特に γ を $(0,0) \to (x,0) \to (x,y)$ という折れ線として考えると

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \int_0^x \partial g/\partial x(t,0)dt + \int_0^y \partial g/\partial y(x,t)dt \\ &= -\int_0^x e^t dt + \int_0^y e^x \sin t\, dt = 1 - e^x \cos y \end{aligned}$$

よって共役調和関数は $g(x,y) = 1 - e^x \cos y = -e^x \cos y +$ 定数．（共役調和関数は定数を除いて一意に定まる.）

数学２B　　小テスト　　No.3　　(5/12)

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　関数 $f(z) = z^2$ が定める等角写像による正方形

$$\{x + iy \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$$

の像を求めよ．また，正方形の４つの頂点のうち等角性が成り立っていない点はどれか？

[**解答**] 例えば正方形の右側の辺はパラメータ表示すると

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = 1 + it$$

と表せる．その像は

$$f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad f \circ \gamma(t) = (1 + it)^2 = (1 - t^2) + 2ti$$

となり，放物線 $x = 1 - (y/2)^2$ の一部になる．同様にして考えれば正方形の像は４つの辺の像で囲まれた領域

$$\{x + iy \mid\ y \geq 0,\ |x| \leq 1 - (y/2)^2\ \}$$

であることがわかる．頂点のうち 0 以外では $f'(z) = 2z \neq 0$ となるので，その点で $F(z)$ は等角になる．頂点 0 では正方形の直角の角が２直角にうつされていることからも明らかなように等角ではない．

数学２B　　小テスト　　No.4　　(5/19)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　解析関数 $f(z) = e^z$ で次の図形がどのような図形に移されるか？

(1) 長方形 $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1,\ -\pi/4 \leq \mathrm{Im}(z) \leq \pi/4,$

(2) 左半平面 $\mathrm{Re}(z) \leq 0.$

[解答] (1) 扇型の領域

$$\{z \mid 1 \leq |z| \leq e, -\pi/4 \leq \arg(z) \leq \pi/4\}$$

(2) 領域

$$\{z \mid 0 < |z| \leq 1\}$$

数学 2 B　小テスト　No.5　(5/26)

学生番号　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 対数関数の主値を表す関数 $\mathrm{Ln}(z)$ について次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ln}(1+i)$ を求めよ．

(2) $f(z) = \mathrm{Ln}(z)$ によって次の図形はどのような図形にうつされるか？

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1, |\arg(z)| \leq \pi/4\}$$

[解答] (1)

$$\mathrm{Ln}(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4}$$

(2) 像は

$$\{z = x + iy \mid x < 0, |y| \leq \pi/4\}$$

数学２B　　小テスト　　No.6　　(6/9)

学生番号　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　余弦関数 $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ を実部と虚部に分けて表せ．またその関数による次の直線の像を求めよ．

$$\ell_1 = \{z \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}, \quad \ell_2 = \{z \mid \mathrm{Im}(z) = 1\}$$

（ヒント：先週 $\sin z$ について詳しく調べたことを思い出そう.）

[解答] (1)

$$\cos\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \cosh y \\ -\sin x \sinh y \end{pmatrix}$$

(2) 像はそれぞれ

$$\{u + iv \mid u \geq 1, v = 0\} \quad \text{半直線}$$

と

$$\{u + iv \mid (u/\cosh 1)^2 + (v/\sinh 1)^2 = 1\} \quad \text{楕円}$$

数学２B　　小テスト　　No.7　　(6/16)

学生番号　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　1 次分数変換 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ で次の条件をみたすものを求めよ．

$$f(-1) = 1, \qquad f(0) = -1, \qquad f(1) = \infty.$$

[**解答**] 次の等式を w について解く．(教科書の解法を参照.)

$$\frac{(w-1)((-1)-\infty)}{(w-\infty)((-1)-1)} = \frac{(z-(-1))(0-1)}{(z-1)(0-(-1)}$$

ただし左辺は ∞ を含む項を約分して

$$\frac{w-1}{((-1)-1)} = \frac{(z-(-1))(0-1)}{(z-1)(0-(-1)}$$

と考える．答えは

$$f(z) = \frac{3z+1}{z-1}.$$

数学 2 B　　小テスト　　No.8　　(6/23)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　1 次分数変換 $f(z) = -\dfrac{z+1}{z-1}$ について以下の集合の像を求めよ．

(1) 実軸 $\mathbb{R}$

(2) 単位円板 $|z| < 1$

(3) 原点を通る半直線 $\arg(z) = \theta$.

[解答] 円円対応と等角性を用いて考える．

(1) $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ から $f(\infty) = -1$ を除いた集合．（円 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ の像は $f(-1) = 0$, $f(1) = \infty$, $f(\infty) = -1$ を通る円になる．）

(2) 虚軸の右側 $\{\mathrm{Re}z > 0\}$.（単位円の像は $f(-1) = 0$, $f(1) = \infty$ を通る円になる．さらに等角性から $f(-1)$ で実軸と直交する．このことから単位円の像は虚軸と ∞ のあわせた円．単位円の像はその右か左の領域であるが，$f(0) = 1$ より右側であることがわかる．）

(3) $1 = f(0)$ と $-1 = f(\infty)$ を通り，実軸と 1 において θ の角度をなす円の一部.（より正確には 1 と -1 を端点とする 2 つの弧のうち一方．どちらになるかは図を書いて考えよう．）

数学２B　小テスト　No.9　(6/30)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 次の問に答えよ．

(1) 領域 $1 < |z| < 2$ 上の調和関数 $\Phi(z)$ で，次の境界条件をみたすものを求めよ．

$$\Phi(z) = \begin{cases} 100, & |z| = 1 \text{ の場合;} \\ 0, & |z| = 2 \text{ の場合.} \end{cases}$$

(2) 上半平面 $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im} z > 0\}$ 上の調和関数 $\Psi(z)$ で次の境界条件を満たすものを求めよ．

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1 \text{ の場合;} \\ 0, & x < -1 \text{ または } x > 1 \text{ の場合.} \end{cases}$$

（ヒント：$\Psi(z) = a \cdot \mathrm{Arg}(z-1) + b \cdot \mathrm{Arg}(z+1) + c$ とおいて a, b, c と適当に定めよ.)

[解答]

(1) 前回の講義から $\Phi(z) = a \log |z| + b$ の形になる．そこで a, b を

$$a \log 1 + b = 100, \qquad a \log 2 + b = 0$$

を満たすように選べば良い．具体的には $a = -100/\log 2$, $b = 100$ として

$$\Phi(z) = -\frac{100}{\log 2} \cdot \log |z| + 100.$$

(2) Ψ がヒントで書いた形であるとすると a, b, c についての条件は

$$c = 0, \quad \pi a + c = 1, \quad \pi a + \pi b + c = 0$$

なので

$$a = 1/\pi, \quad b = -1/\pi, \quad c = 0.$$

よって，

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{Arg}(z-1) - \frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{Arg}(z+1)$$