数学２Ｂ　　小テスト　　No.1　　(4/20)

学生番号　　　　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ (a) 複素数 $6-8i$ と $4+3i$ を複素平面に図示して，その間の角度を求めよ．

(b) 次の値を求めよ．(前問がヒント．)

$$\left(\frac{6-8i}{4+3i}\right)^6$$

(c) 方程式 $z^6+1=0$ の全ての解を求めて，複素平面上に図示せよ．

数学２B　　小テスト　　No.2　　(4/28)

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 次の関数が調和関数である事を確かめよ．また，その共役調和関数を求めよ．

$$f(x,y) = e^x \sin y$$

[**解答**] ラプラス作用素 $\Delta = \nabla^2$ を作用させると

$$\Delta f(x,y) = (\partial^2/\partial x^2)f(x,y) + (\partial^2/\partial y^2)f(x,y) = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

であるので，f は調和関数である．共役調和関数を g とすると，コーシーリーマンの方程式から

$$\partial g/\partial x = -\partial f/\partial y = -e^x \cos y, \quad \partial g/\partial y = \partial f/\partial x = e^x \sin y$$

例えば $(0,0)$ を基準点として，$(0,0)$ と (x,y) を結ぶ曲線を γ とすると

$$g(x,y) = \int_\gamma \nabla g \cdot d\mathbf{x}$$

である．特に γ を $(0,0) \to (x,0) \to (x,y)$ という折れ線として考えると

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \int_0^x \partial g/\partial x(t,0)dt + \int_0^y \partial g/\partial y(x,t)dt \\ &= -\int_0^x e^t dt + \int_0^y e^x \sin t\, dt = 1 - e^x \cos y \end{aligned}$$

よって共役調和関数は $g(x,y) = 1 - e^x \cos y = -e^x \cos y +$ 定数．（共役調和関数は定数を除いて一意に定まる.）

数学２B　　小テスト　　No.3　　(5/12)

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 関数 $f(z) = z^2$ が定める等角写像による正方形

$$\{x + iy \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

の像を求めよ．また，正方形の４つの頂点のうち等角性が成り立っていない点はどれか？

[**解答**] 例えば正方形の右側の辺はパラメータ表示すると

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = 1 + it$$

と表せる．その像は

$$f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad f \circ \gamma(t) = (1 + it)^2 = (1 - t^2) + 2ti$$

となり，放物線 $x = 1 - (y/2)^2$ の一部になる．同様にして考えれば正方形の像は４つの辺の像で囲まれた領域

$$\{x + iy \mid \ y \ge 0,\ |x| \le 1 - (y/2)^2\ \}$$

であることがわかる．頂点のうち０以外では $f'(z) = 2z \ne 0$ となるので，その点で $F(z)$ は等角になる．頂点０では正方形の直角の角が２直角にうつされていることからも明らかなように等角ではない．

数学２B　小テスト　No.4　(5/19)

学生番号　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 解析関数 $f(z) = e^z$ で次の図形がどのような図形に移されるか？

(1) 長方形 $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1,\ -\pi/4 \leq \mathrm{Im}(z) \leq \pi/4,$

(2) 左半平面 $\mathrm{Re}(z) \leq 0.$

[解答] (1) 扇型の領域

$$\{z \mid 1 \leq |z| \leq e, -\pi/4 \leq \arg(z) \leq \pi/4\}$$

(2) 領域

$$\{z \mid 0 < |z| \leq 1\}$$

数学２B　　小テスト　　No.5　　(5/26)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　対数関数の主値を表す関数 $\mathrm{Ln}(z)$ について次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ln}(1+i)$ を求めよ．

(2) $f(z) = \mathrm{Ln}(z)$ によって次の図形はどのような図形にうつされるか？

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1, |\arg(z)| \leq \pi/4\}$$

[解答] (1)

$$\mathrm{Ln}(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4}$$

(2) 像は

$$\{z = x + iy \mid x < 0, |y| \leq \pi/4\}$$

数学２B　　小テスト　　No.6　　(6/9)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　余弦関数 $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ を実部と虚部に分けて表せ．またその関数による次の直線の像を求めよ．

$$\ell_1 = \{z \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}, \quad \ell_2 = \{z \mid \mathrm{Im}(z) = 1\}$$

（ヒント：先週 $\sin z$ について詳しく調べたことを思い出そう.）

[解答] (1)

$$\cos\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \cosh y \\ -\sin x \sinh y \end{pmatrix}$$

(2) 像はそれぞれ

$$\{u + iv \mid u \geq 1, v = 0\} \quad \text{半直線}$$

と

$$\{u + iv \mid (u/\cosh 1)^2 + (v/\sinh 1)^2 = 1\} \quad \text{楕円}$$

数学 2 B　　小テスト　　No.7　　(6/16)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　1 次分数変換 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ で次の条件をみたすものを求めよ.

$$f(-1) = 1, \qquad f(0) = -1, \qquad f(1) = \infty.$$

[**解答**] 次の等式を w について解く.（教科書の解法を参照.）

$$\frac{(w-1)((-1)-\infty)}{(w-\infty)((-1)-1)} = \frac{(z-(-1))(0-1)}{(z-1)(0-(-1)}$$

ただし左辺は ∞ を含む項を約分して

$$\frac{w-1}{((-1)-1)} = \frac{(z-(-1))(0-1)}{(z-1)(0-(-1)}$$

と考える．答えは

$$f(z) = \frac{3z+1}{z-1}.$$

数学 2 B　　小テスト　　No.8　　(6/23)

学生番号　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　1 次分数変換 $f(z) = -\dfrac{z+1}{z-1}$ について以下の集合の像を求めよ．

(1) 実軸 $\mathbb{R}$

(2) 単位円板 $|z| < 1$

(3) 原点を通る半直線 $\arg(z) = \theta$.

[**解答**] 円円対応と等角性を用いて考える．

(1) $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ から $f(\infty) = -1$ を除いた集合.（円 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ の像は $f(-1) = 0$, $f(1) = \infty$, $f(\infty) = -1$ を通る円になる.）

(2) 虚軸の右側 $\{\mathrm{Re}z > 0\}$.（単位円の像は $f(-1) = 0$, $f(1) = \infty$ を通る円になる．さらに等角性から $f(-1)$ で実軸と直交する．このことから単位円の像は虚軸と ∞ のあわせた円．単位円の像はその右か左の領域であるが，$f(0) = 1$ より右側であることがわかる.）

(3) $1 = f(0)$ と $-1 = f(\infty)$ を通り，実軸と 1 において θ の角度をなす円の一部.（より正確には 1 と -1 を端点とする 2 つの弧のうち一方．どちらになるかは図を書いて考えよう.）

数学２B　　小テスト　　No.9　　(6/30)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　次の問に答えよ．

(1) 領域 $1 < |z| < 2$ 上の調和関数 $\Phi(z)$ で，次の境界条件をみたすものを求めよ．

$$\Phi(z) = \begin{cases} 100, & |z| = 1 \text{ の場合;} \\ 0, & |z| = 2 \text{ の場合.} \end{cases}$$

(2) 上半平面 $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im} z > 0\}$ 上の調和関数 $\Psi(z)$ で次の境界条件を満たすものを求めよ．

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1 \text{ の場合;} \\ 0, & x < -1 \text{ または } x > 1 \text{ の場合.} \end{cases}$$

（ヒント：$\Psi(z) = a \cdot \mathrm{Arg}(z-1) + b \cdot \mathrm{Arg}(z+1) + c$ とおいて a, b, c と適当に定めよ.)

[解答]

(1) 前回の講義から $\Phi(z) = a \log|z| + b$ の形になる．そこで a, b を

$$a \log 1 + b = 100, \qquad a \log 2 + b = 0$$

を満たすように選べば良い．具体的には $a = -100/\log 2$, $b = 100$ として

$$\Phi(z) = -\frac{100}{\log 2} \cdot \log|z| + 100.$$

(2) Ψ がヒントで書いた形であるとすると a, b, c についての条件は

$$c = 0, \quad \pi a + c = 1, \quad \pi a + \pi b + c = 0$$

なので

$$a = 1/\pi, \quad b = -1/\pi, \quad c = 0.$$

よって，

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{Arg}(z-1) - \frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{Arg}(z+1)$$

数学２B　　小テスト　　No.10　　(7/6)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　円板 $|z| < 1$ 上の調和関数 $\Phi(z)$ で，次の境界条件をみたすものを求めよ．

$$\Phi(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & -\pi/2 < \theta < \pi/2; \\ -1, & \text{それ以外}; \end{cases}$$

また，Φ の等ポテンシャル線と力線を描け．
（ヒント：宿題に出した例２の角度 $\pi/2$ だけ回転させれば良い．）

[解答] $f(-i) = 0$, $f(i) = \infty$, $f(1) = 1$ をみたす１次分数変換 f

$$f(z) = \frac{-i(z+i)}{z-i}$$

を考える．この１次分数変換は単位円周を実軸（と無限遠点）にうつし，単位円板を上半平面にうつすことに注意する．

上半平面上では調和関数 Φ^* で境界条件

$$\Phi^*(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0; \\ -1, \ x < 0; \end{cases}$$

を満たす調和関数として

$$\Phi^*(z) = -\frac{2}{\pi}\mathrm{Arg}(z) + 1$$

をとることができる．よって，求める Φ は

$$\Phi(z) = \Phi^*(f(z)) = -\frac{2}{\pi} \cdot \mathrm{Arg}\left(\frac{-i(z+i)}{z-i}\right) + 1$$

で与えられる．等ポテンシャル線と力線は Φ^* に対するそれらを f^{-1} でうつしたものになる．(全て円の一部になる．)

数学２B　　小テスト　　No.11　　(7/14)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　(1) 上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 上の調和関数 $\Phi^*(z)$ で次の境界条件を満たすものを求めよ．

$$\Phi^*(x) = \begin{cases} 1, & (|x| < 1); \\ 0, & (|x| > 1). \end{cases}$$

(2) 角領域 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0,\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ 上の調和関数 Φ で次の境界条件を満たすものを求めよ．

$$\Phi(x+iy) = \begin{cases} 1, & (x = 0 \text{ かつ } 0 \leq y < 1); \\ 1, & (y = 0 \text{ かつ } 0 \leq x < 1); \\ 0, & (\text{その他.}) \end{cases}$$

（ヒント：(1) を利用する．$z \mapsto z^2$ を考えよ．）

[解答]　(1) これは No.9 (2) と同じ問題.

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Arg}(z-1) - \mathrm{Arg}(z+1)\right)$$

(2) 求める関数は $\Phi(z) = \Phi^*(z^2)$ として得られる.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Arg}(z^2-1) - \mathrm{Arg}(z^2+1)\right)$$

数学２B　　小テスト　　No.12　　(7/21)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 解析関数 $F(z) = i \cdot \sin^{-1}(z)$ をポテンシャルとする完全流について問に答えよ.

(1) 流線を描け.

(2) 等ポテンシャル線を描け.

[解答] 前週の講義で扱っているのでノートを参照.（教科書の節末の練習問題にも同じ問題があります.）