数学２B　　小テスト　　No.10　　(7/5)

学生番号　　　　　　　　　　氏名

$\boxed{1}$

(1) 領域 $1 < |z| < 2$ 上の調和関数 $\Phi(z)$ で，次の境界条件をみたすものを求めよ．

$$\Phi(z) = \begin{cases} +100, & |z| = 1 \text{ の場合;} \\ -100, & |z| = 2 \text{ の場合.} \end{cases}$$

(2) a を実数の定数とするとき，$\mathrm{Arg}\,(z-a)$ が上半平面 $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im} z > 0\}$ 上の調和関数であることを示せ．そのことと重ね合わせの原理を利用して，調和関数 $\Psi(z)$ で次の境界条件を満たすものを求めよ：

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \text{ の場合;} \\ 0, & x < 0 \text{ または } x > 1 \text{ の場合.} \end{cases}$$

（ヒント：$\mathrm{Arg}\,(z-a)$ の実軸上での値に注意．$\Psi(z) = a \cdot \mathrm{Arg}(z) + b \cdot \mathrm{Arg}(z-1) + c$ とおいて a, b, c を適当に定めよ.)

[解答] (1) 前回の講義から $\Phi(z) = a \log|z| + b$ の形になる．そこで a, b を

$$a \log 1 + b = 100, \qquad a \log 2 + b = -100$$

を満たすように選べば良い．具体的には $a = -200/\log 2$, $b = 100$ として

$$\Phi(z) = -\frac{200}{\log 2} \cdot \log|z| + 100.$$

(2) Ψ がヒントで書いた形であるとする．関数 $\mathrm{Arg}\,(z-a)$ の実軸上での値は $x < a$ で π, $x > a$ で 0 であることに注意して，$x < 0$, $0 < x < 1$ および $1 < x$ における値を条件を満たすようにするには

$$\pi a + \pi b + c = 0, \quad \pi b + c = 1, \quad c = 0$$

を満たすように a, b, c をとればよい．これを解くと

$$a = -1/\pi, \quad b = 1/\pi, \quad c = 0.$$

よって，

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{Arg}(z-1) - \frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{Arg}(z)$$