

学生番号

氏名

1 1次分数変換  $f$  で次の条件をみたすものを求めよ.

$$f(i) = \infty, \quad f(-i) = 0, \quad f(1) = 1$$

次に (この1次分数変換  $f$  を用いて) 円板  $|z| < 1$  上の調和関数  $\Phi(z)$  で, 次の境界条件をみたすものを求めよ.

$$\Phi(e^{i\theta}) = \begin{cases} -1, & -\pi/2 < \theta < \pi/2; \\ +1, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

さらに,  $\Phi$  の等ポテンシャル線と力線を描け.

[解答] 要は1次分数変換で単位円板を上半平面 (または右反平面) に移して, 前回の小テストの(2) で考えた調和関数の構成を用いればよい. 1次分数変換の取り方はいろいろあるが, 例えば

$$w = f(z) = (-i) \cdot \frac{z+i}{z-i}$$

とすると

$$f(i) = \infty, \quad f(-i) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(-1) = -1$$

なので, 単位円周を実軸 (と無限遠点) にうつし, 単位円板を上半平面にうつす.

次に上半平面上の調和関数  $\Phi^*$  で問題の条件に対応する境界条件

$$\Phi^*(x) = \begin{cases} -1, & x > 0; \\ +1, & x < 0; \end{cases}$$

を満たすものをとる. これは具体的には

$$\Phi^*(w) = -1 + \frac{2}{\pi} \cdot \text{Arg}(w)$$

ととることができる. (先週の小テストの問題を参照.) よって, 求める  $\Phi$  は

$$\Phi(z) = \Phi^*(f(z)) = \frac{2}{\pi} \cdot \text{Arg} \left( \frac{-i(z+i)}{z-i} \right) - 1 = \frac{2}{\pi} \cdot \text{Arg} \left( \frac{z+i}{z-i} \right) - 2$$

で与えられる. 等ポテンシャル線と力線は  $\Phi^*$  に対するそれらを  $f^{-1}$  でうつしたものになる. (全て円の一部になる. 概略は p169 の例 2 の図 (a) を 90 度回転したもので点線が力線.)

注意 1次分数変換は別の取り方をしてもよい. ただ, 計算は少し複雑になるかもしれない.