

学生番号

氏名

1 1次分数変換 $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ について以下の集合の像を求めよ.

- (1) 実軸 \mathbb{R}
- (2) 単位円板 $|z| < 1$
- (3) 原点を通る半直線 $\arg(z) = \theta$.

[解答] 円円対応と等角性を用いて考える.

- (1) $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ から $f(\infty) = -1$ を除いた集合. (円 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ の像は $f(-1) = 0, f(1) = \infty, f(\infty) = 1$ を通る円になる.)
- (2) 虚軸の左側 $\{\operatorname{Re} z > 0\}$. (単位円の像は $f(-1) = 0, f(1) = \infty$ を通る円になる. さらに等角性から $f(-1)$ で実軸と直交する. このことから単位円の像は虚軸と ∞ のあわせた円. 単位円の像はその右か左の領域であるが, $f(0) = -1$ より左側であることがわかる.)
- (3) $-1 = f(0)$ と $1 = f(\infty)$ を通り, 実軸と 1 において θ の角度をなす円の一部. (より正確には 1 と -1 を端点とする2つの弧のうち一方. どちらになるかは図を書いて考えよ.)