

学生番号

氏名

1 1次分数変換  $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$  について以下の集合の像を求めよ.

- (1) 実軸  $\mathbb{R}$
- (2) 単位円板  $|z| < 1$
- (3) 原点を通る半直線  $\arg(z) = \theta$ .

[解答] 円円対応と等角性を用いて考える.

- (1)  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  から  $f(\infty) = -1$  を除いた集合. (円  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  の像は  $f(-1) = 0, f(1) = \infty, f(\infty) = 1$  を通る円になる.)
- (2) 虚軸の左側  $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ . (単位円の像は  $f(-1) = 0, f(1) = \infty$  を通る円になる. さらに等角性から  $f(-1)$  で実軸と直交する. このことから単位円の像は虚軸と  $\infty$  のあわせた円. 単位円の像はその右か左の領域であるが,  $f(0) = -1$  より左側であることがわかる.)
- (3)  $-1 = f(0)$  と  $1 = f(\infty)$  を通り, 実軸と  $1$  において  $\theta$  の角度をなす円の一部. (より正確には  $1$  と  $-1$  を端点とする2つの弧のうち一方. どちらになるかは図を書いて考えよ.)