数学２Ｂ　小テスト　No.1　(4/24)

学生番号　　　　　　　　　　氏名

$\boxed{1}$ (a) 複素数 $1+\sqrt{3}i$ と $1+i$ を複素平面に図示し，それらの偏角の差を求めよ．

(b) 次の値を求めよ．

$$\left(\frac{1+i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{100}\cdot 2^{50}$$

(c) 方程式 $z^4=-1$ の全ての解を求めて，複素平面上に図示せよ．

[解答] (a) 省略．(ノートまたは教科書を参照．)

(b) 絶対値については

$$\left|\left(\frac{1+i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{100}\cdot 2^{50}\right| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}\cdot 2^50 = 1.$$

偏角については

$$\begin{aligned}\arg\left(\left(\frac{1+i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{100}\cdot 2^{50}\right) &= 100(\arg(1+i)-\arg(1+\sqrt{3}i))+50\arg 2\\ &= 100(\pi/4-\pi/3)+50\cdot 0\\ &= -\frac{100}{12}\pi = -\frac{1}{3}\pi+8\pi\end{aligned}$$

よって

$$\left(\frac{1+i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{100}\cdot 2^{50} = 1\cdot e^{-i\pi/3} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.$$

(b) $z^4=-1$ は

$$|z^4| = |-1|, \qquad \arg(z^4) = \pi+2n\pi$$

と同値であるので

$$|z| = 1, \qquad \arg(z) = \pi/4+n\pi/2.$$

つまり

$$z = e^{\pi/4+n\pi/2}, \quad n=0,1,2,3.$$

具体的には

$$z = \frac{\pm 1\pm i}{\sqrt{2}}$$

(図は省略．斜め 45 度に傾いた正方形の頂点になる．)

数学２B　小テスト　No.2　(5/1)

学生番号　　　　　　　　　　　　氏名

$\boxed{1}$ (a) 複素数 z について $\cos(z)$ の定義を与え，$\cos(i)$ の値を求めよ．

(b) 次の方程式の解を全て求めよ．

$$\cos z = 2$$

[解答] (a)

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

特に $z = i$ とすれば

$$\cos(i) = \frac{1}{2}(e^{-1} + e)$$

(b) $w = e^{iz}$ と置けば

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$$

なので，与えられた方程式は

$$w + \frac{1}{w} = 4$$

となる．両辺に w をかけて整理すれば

$$w^2 - 4w + 1 = 0$$

この２次方程式の解は

$$w = 2 \pm \sqrt{3}.$$

よって，解は

$$z = -i \cdot \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi = \pm i \cdot \ln(2 + \sqrt{3}) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

最後のところは　$(2 - \sqrt{3}) = 1/(2 + \sqrt{3})$ を使っている．