数学２B　小テスト　No.10　(7/4)

学生番号　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$

(1) 領域

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3, |z-1| > 1\}$$

の概形を図示せよ．

(2) (1) の領域 U を円環領域

$$V = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < 1\}$$

に移すような 1 次分数変換を求めよ．(r は自由に選べるとする．) ただし，1 次分数変換は

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

の形で表して，$d = 1$ となるようにせよ．

[**解答**] (1) 省略 (2) 前回の講義に倣って，1 次分数変換の中で求める等角写像を見つけることを考える．1 次分数変換

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

で求める性質をみたすためには

$$f(-3) = -1, f(0) = -r, f(2) = r, f(3) = 1$$

であればよい．なぜ，これで十分であるかは円円対応と等角性からわかるが，これは講義で説明したので繰り返さない．

まず $f(0) = -r \neq \infty$ なので $d = 0$ である．よって，分母分子を d で割って，$d = 1$ と仮定できる．$f(-3) = -1$, $f(3) = 1$ という条件から $a = 1/3$, $c = b/3$ である．さらに

$$f(0) = -f(2)$$

という関係から

$$b = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

であるが，$b = r$ であるので符号は $+$ でなければならない．よって

$$b = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

となる．よって求める 1 次分数変換は

$$f(z) = \frac{(1/3)z + (-3+\sqrt{5})/2}{(1/6)(-3+\sqrt{5})z + 1}$$

このとき

$$r = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

である．