

学生番号

氏名

1 1次分数変換 f で次の条件をみたすものを求めよ.

$$f(i) = \infty, \quad f(-i) = 0, \quad f(1) = 1$$

また, f が単位円板を上半平面に移すことを用いて, 単位円板 $|z| < 1$ 上の調和関数 $\Phi(z)$ で, 次の境界条件をみたすものを求めよ.

$$\Phi(e^{i\theta}) = \begin{cases} -1, & -\pi/2 < \theta < \pi/2; \\ +1, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

さらに, Φ の等ポテンシャル線と力線を描け.

[解答] 前半は以前やった三点对応についての公式を使えばよい. (少し頭を使うと簡単にできる.)

$$f(z) = (-i) \cdot \frac{z+i}{z-i}$$

円円対応から単位円周は $\infty, 0, 1$ を通る一般化された円, すなわち, 実軸に移される. また, 原点 0 は i に移されることから単位円板 $|z| < 1$ は上半平面 $\text{Im}z > 0$ に移される.

次に上半平面上の調和関数 Φ^* で問題の条件に対応する境界条件

$$\Phi^*(x) = \begin{cases} -1, & x > 0; \\ +1, & x < 0; \end{cases}$$

を満たすものをとる. これは具体的には

$$\Phi^*(w) = -1 + \frac{2}{\pi} \cdot \text{Arg}(w)$$

ととることができる. よって, 求める Φ は

$$\Phi(z) = \Phi^*(f(z)) = \frac{2}{\pi} \cdot \text{Arg}\left(\frac{-i(z+i)}{z-i}\right) - 1 = \frac{2}{\pi} \cdot \text{Arg}\left(\frac{z+i}{z-i}\right) - 2$$

で与えられる. 等ポテンシャル線と力線は Φ^* に対するそれらを f^{-1} でうつしたものになる. (全て円の一部になる. 概略は p169 の例 2 の図 (a) を 90 度回転したもので点線が力線.)