

学生番号

氏名

1 1次分数変換 $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$ について以下の集合の像を求めよ.

- (1) 実軸 \mathbb{R}
- (2) 単位円板 $|z| < 1$
- (3) 原点を通る半直線 $\arg(z) = \theta$.

[解答] 円円対応と等角性を用いて考える。(図は入力が高しいため省略する.)

- (1) 単位円周 $|z| = 1$ から $f(\infty) = -1$ を除いた集合. (一般化された円 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ の像は $f(1) = i$, $f(-1) = -i$, $f(\infty) = 1$ を通る一般化された円になる.)
- (2) 虚軸の左側 $\{|z| < 0\} \cup \{\infty\}$ になる. (単位円の像は $f(1) = i$, $f(-1) = -i$, $f(-i) = 0$, $f(i) = \infty$ を通る一般化された円になるので虚軸と無限遠点 ∞ を合わせた集合になる. 単位円板の像はその右か左の領域であるが, $f(0) = -1$ より左側であることがわかる.)
- (3) もとの半直線は 0 と ∞ を通り, 実軸と角度 θ で交わる一般化された円の一部であるので, 像は $-1 = f(0)$ と $1 = f(\infty)$ を通り, 単位円周と -1 において θ の角度をなす円の一部になる. (より正確には 1 と -1 を端点とする2つの弧のうち一方になる. どちらになるかは図を書いて考えれば明らかはず.)