

# 数学演習後期第14回＝線形代数後期第7回

1/27 解説

狙い：エルミート行列、ユニタリ行列、正規行列の対角化。

問題：次の [1], [2], [3] のうち、どれか1題に解答せよ。

[1]  $A = \begin{pmatrix} -15 + 15i & 1 + 3i & -2 - 6i \\ -3 - i & -19 + 11i & -2 - 2i \\ 6 + 2i & -2 - 2i & -16 + 14i \end{pmatrix}$  とする。

$U^*AU$  が対角行列となるようなユニタリ行列  $U$  を1つ求めよ。

[2]  $A$  を複素数を成分とする正方行列とする。  $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ ,  $C = \frac{1}{2i}(A - A^*)$  とする。

- (a)  $B, C$  はエルミート行列であることを示せ。
- (b)  $A = B + iC$  であることを示せ。
- (c)  $A^*$  を  $B$  と  $C$  を用いて表せ。
- (d)  $A$  が正規行列であれば、 $BC = CB$  であることを示せ。
- (e)  $BC = CB$  であれば  $A$  は正規行列であることを示せ。
- (f)  $BC = CB$  とする。  $\mathbf{v}$  は  $B$  の固有値  $\lambda$  の固有ベクトルであるとする。この時  $C\mathbf{v}$  も  $B$  の固有値  $\lambda$  の固有ベクトルであるか、あるいは、 $C\mathbf{v}$  は零ベクトルとなることを示せ。

[3] は2ページ目にあります。

3  $A = \begin{pmatrix} -15 + 15i & 1 + 3i & -2 - 6i \\ -3 - i & -19 + 11i & -2 - 2i \\ 6 + 2i & -2 - 2i & -16 + 14i \end{pmatrix}$  とする。  $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ ,  $C = \frac{1}{2i}(A - A^*)$  とする。

- (a)  $A$  は正規行列か？
- (b)  $B$  はエルミート行列か？  $C$  はエルミート行列か？
- (c)  $B$  の固有値、固有空間を求めよ。  $C$  の固有値、固有空間を求めよ。
- (d)  $B$  の固有空間と  $C$  の固有空間の共通部分をそれぞれ求めよ。
- (e) 上の (d) で計算した部分空間の基底を適当に選び、それらを正規直交化せよ。
- (f) 上の (e) の手順で得られた 3 本のベクトルは  $\mathbb{C}^3$  の正規直交基底か？
- (g) 上の (f) で得られた 3 本の列ベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  を並べて、行列  $U = (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3)$  を作る。  
 $U$  はユニタリ行列か？
- (h)  $U^*BU, U^*CU, U^*AU$  を求めよ。

問題は以上です。

- もちろん、2 題以上に解答してもいいです。点数は良い方の点数を採用します。
- 3 (a)(b)(f)(g) は結果だけで良いです。はい・いいえや○×で答えて OK です。
- 1 と 3 の行列  $A$  は同じものです。
- 2 と 3 で  $B, C$  の作り方は同じです。
- 3 (b) はこの具体的な数字の行列  $A$  の場合に直接確認してください。つまり、2 の (a) を使うと面白くないので使わないでください。
- 3 (a) はこの具体的な数字の行列  $A$  の場合に直接確認してください。つまり、2 の (e) を使わないでください。