

数学演習 (第 6 回 = 線形代数第 3 回) : 解答例

6/17 出題, 6/23 提出締切, 6/24 解説

$$\boxed{1} \quad (1) \quad A - 3E = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -9 & -10 \end{pmatrix}, \quad A - 2E = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \\ -6 & -3 & -9 & -9 \end{pmatrix}.$$

(2) 連立 1 次方程式の拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & -9 & -10 & 0 \end{pmatrix}$ である。これを簡約化し

た行列は、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である (答案には途中の計算が必要)。従って、解は、 $\mathbf{x} =$

$$c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

(3) 連立 1 次方程式の拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & -9 & -9 & 0 \end{pmatrix}$ である。これを簡約化した

行列は、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である (答案には途中の計算が必要)。従って、解は、 $\mathbf{x} =$

$$c_3 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので、

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) 逆行列を求めるために

$$[P|E] = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を簡約化して行くと (答案には途中の計算が必要)、答えは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & -3 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

となる。したがって

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 4 \\ -6 & -3 & -9 & -9 \\ -3 & 0 & -3 & -4 \\ 6 & 3 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

となる。

(5) 今までに求めた P , P^{-1} と A を用いて行列の積を直接計算すると (答案には途中の計算が必要)、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

もし要領よくやろうとしたら、

$$\begin{aligned}
 AP &= A \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A\mathbf{u}_1 & A\mathbf{u}_2 & A\mathbf{u}_3 & A\mathbf{u}_4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3\mathbf{u}_1 & 3\mathbf{u}_2 & 3\mathbf{u}_3 & 3\mathbf{u}_4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

この等式の両辺に左から P^{-1} をかけて、結論を得る。とすると、行列計算は不要。

コメント：結果の数値が正しくない場合、途中の計算が省略されていて書かれていないと、

- (i) 理論的に誤っているのか、
- (ii) やり方が正しくないのか、
- (iii) 計算ミスか、あるいは、
- (iv) 写し違いなのか、

読み手にはわからないので、添削指導ができません。どこでどう誤ったかによって、気をつけてもらうポイントが変わってくるのです。

背景：5.4 節、行列の対角化。例題 5.4.2 から題材をとりました。どうして、最初の (1) で A から $A - 3E$ や $A - 2E$ に気がつくか、というところ（固有値 3 と 2 である）の説明はもちろんまだしていませんが、その他の計算は現時点で全てできることになります。

2 答え： $n = 4k, 4k + 1$ の時は $\text{sgn}(\sigma) = +1$ 。 $n = 4k + 2, 4k + 3$ の時は $\text{sgn}(\sigma) = -1$ 。

証明： $n = 2m$ の時。

$\sigma = (1\ 2m)(2\ 2m-1)\cdots(m-1\ m+2)(m\ m+1)$ 。したがって、 $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^m$ 。

$n = 2m + 1$ の時。

$\sigma = (1\ 2m+1)(2\ 2m)\cdots(m-1\ m+3)(m\ m+2)$ 。したがって、 $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^m$ 。

証明終わり。

発展： σ の転倒数 $l(\sigma)$ を計算し、それを用いて $\text{sgn}(\sigma)$ を計算して、上の結果と一致することを確認してみよう。

背景： σ は、A 型 Coxeter 群の最長元。