数学演習 (第 6 回 = 線形代数第 3 回)

6/17 出題, 6/23 提出締切, 6/24 解説

狙い：連立一次方程式と逆行列の計算をする。置換の符号の記号や言葉遣いに慣れて計算をする。

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \\ -6 & -3 & -9 & -7 \end{pmatrix}$ とする。E を 4 次の単位行列とする。

(1) $A - 3E$, $A - 2E$ を計算せよ。

(2) 連立 1 次方程式 $(A - 3E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解け。

(3) 連立 1 次方程式 $(A - 2E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解け。

ここで記号を設定します。

- (2) の解を $c\,\mathbf{u}_1 + c'\mathbf{u}_2$ と書きます。($\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ の定義です。)
- (3) の解を $c\,\mathbf{u}_3 + c'\mathbf{u}_4$ と書きます。($\mathbf{u}_3$ と $\mathbf{u}_4$ の定義です。)
- そして、それらの列ベクトル 4 本を並べて、$P = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \end{pmatrix}$ によって、4 次正方行列 P を定義します。

(4) P の逆行列を求めよ。

(5) $P^{-1}AP$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 置換 $\sigma \in S_n$ を

$$\sigma(i) = n + 1 - i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

で定める。符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を求めよ。

問題は以上です。

料理長からのメッセージ：今日は大皿料理パエリアと、デザートにティラミスをご用意しました。

$\boxed{1}$ レポートには (1) の答えを書かなくても良いです。つまり、自分のノートにやってあれば、レポートは (2) から書き始めてもらっていいです。

(2)(3)(4) は答えだけでなく、途中の計算もしっかり書いてください。特に、(3) を「(2) と同様に」と書かないこと。問題は似てるけど、答えは全然同様ではない！

なお、(2)(3) で「連立 1 次方程式と拡大係数行列の対応の説明」は、今回のレポートでは省略してもいいです。（その説明は書かなくていいです、前回の演習で解きましたので。もちろん、きちんと書いてもいいです。）

(5) では (4) の結果を使って解いても、使わずに解いてもどちらでもいいです。ただし、仮に (5) で (4) を使わなくても、(4) も解いてください。(4) は 2.4 節の練習問題なので、それが解けることも確認したいのです。

$\boxed{2}$ 一般の n の時がわからなければ、代わりに次の 4 つの小問をしてください。

(1) $n = 6$ の時の $\sigma \in S_6$ を書き、σ を互換の積に表せ。

(3) $n = 7$ の時の $\sigma \in S_7$ を書き、σ を互換の積に表せ。

(3) $n = 8$ の時の $\sigma \in S_8$ を書き、σ を互換の積に表せ。

(4) $n = 9$ の時の $\sigma \in S_9$ を書き、σ を互換の積に表せ。

一般の n の場合の答えの予想はつくけど、うまく説明ができない場合でも、とりあえず、「答えの予想」はハッキリと書きましょう。この問題の目的は、新しく学んだ置換の定義や記号の使い方や符号の定義や性質に馴染むことなので、ちゃんとした証明ができなくても正しい予想式が立てられれば、かなり良いのです。

進んだ内容・高度な要求：

講義ではまだ説明していないことですが、行列の簡約化は一通りに決まります (p26, 定理 2.2.1)。そして、講義で説明していないことですが、連立方程式の解の書き表わし方は、何通りもあります。講義で詳しく説明したのはそのうちの「簡約な行列で主成分以外の列に対して変数 c_i を用意して解を表示する」という方法です。この方法を使えば<u>必ず</u>連立 1 次方程式の解を書き表すことができます。この方法は万能ですが、場合によっては分数が出てきたりして数字が複雑になります。

そこで、「簡易化した行列の主成分」という手法にこだわらなければ、連立 1 次方程式の解として、数字が小さく分母を持たないような表示を得ることも、場合によっては可能です。前置きが長くて恐縮ですが、この欄でコメントしたいことは：$\boxed{1}$(4) で現れる行列 P が、より簡単になるような工夫をすることも歓迎します。ただし、これは、第 2 章で講義している範囲からは明白に範囲外です。