

2023/1/18 配布分

## 数学演習 AII 解答例—11 回目：対角化の応用

[1] 固有多項式  $\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$ 。従って、固有値は  $3, -2$ 。

$$\text{固有空間 } W(3) = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, W(-2) = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

[2]  $A = P\Lambda P^{-1}$  とし、 $\exp(tA) = \exp(tP\Lambda P^{-1}) = P\exp(t\Lambda)P^{-1}$ 。ここで、 $\exp(t\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$  と、[1] の  $P, P^{-1}$  を代入すると、答えは  $\frac{1}{5} \exp(tA) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} + 3e^{-2t} & e^{3t} - e^{-2t} \\ 6e^{3t} - 6e^{-2t} & 3e^{3t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$ 。

なお、以下は余談だが、答えの式で  $t = 0$  を代入すると単位行列になる。また、答えの式を  $t$  で微分すると  $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \times 3e^{3t} + 3 \times (-2)e^{-2t} & 3e^{3t} - (-2)e^{-2t} \\ 6 \times 3e^{3t} - 6(-2)e^{-2t} & 3 \times 3e^{3t} + 2(-2)e^{-2t} \end{pmatrix}$  となり、その式で  $t = 0$  を代入すると  $A$  になる。この性質は一般に成り立つので検算に使うことができる。

[3]  $X(t) = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$  と定義すると、 $X'(t) = AX(t)$  が成り立つ。この時、 $X(t) = \exp(tA)X(0)$  である。また、与えられた初期条件は  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  と表せるので、[2] を用いると  $X(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{3t} + e^{-2t} \\ 12e^{3t} - 2e^{-2t} \end{pmatrix}$  となるので、第1成分を見て、答えは  $y = 4e^{3t} + e^{-2t}$ 。

なお、第2成分  $y' = 12e^{3t} - 2e^{-2t}$  が検算になっている。

[4]  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$  と定義すると、 $X_{n+1} = AX_n$  が成り立つ。この時、 $X_n = A^n X_0$  である。ここで、 $A^n = (P\Lambda P^{-1})^n = P\Lambda^n P^{-1}$  であるから、 $X_n = P\Lambda^n P^{-1} X_0$  となる。ここまで一般論なので計算は易しい。以下、具体的な数値を代入してみよう。

与えられた初期条件は  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  と表せる。 $\Lambda^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$  である。これと [1] の  $P, P^{-1}$  を代入すると、 $X_n = \frac{4 \times 3^n + (-2)^n}{5}$ 。