2023/1/18 配布分

数学演習 AII 解答例—11 回目：対角化の応用

$\boxed{1}$ 固有多項式 $\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$。従って、固有値は $3, -2$.

固有空間 $W(3) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})$. $W(-2) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix})$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ $A = P\Lambda P^{-1}$ ゆえ、$\exp(tA) = \exp(tP\Lambda P^{-1}) = P\exp(t\Lambda)P^{-1}$. ここで、$\exp(t\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$ と、$\boxed{1}$ の P, P^{-1} を代入すると、答えは $\exp(tA) = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{3t} + 3e^{-2t} & e^{3t} - e^{-2t} \\ 6e^{3t} - 6e^{-2t} & 3e^{3t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$.

なお、以下は余談だが、答えの式で $t = 0$ を代入すると単位行列になる。また、答えの式を t で微分すると $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \times 3e^{3t} + 3 \times (-2)e^{-2t} & 3e^{3t} - (-2)e^{-2t} \\ 6 \times 3e^{3t} - 6(-2)e^{-2t} & 3 \times 3e^{3t} + 2(-2)e^{-2t} \end{pmatrix}$ となり、その式で $t = 0$ を代入すると A になる。この性質は一般に成り立つので検算に使うことができる。

$\boxed{3}$ $X(t) = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ と定義すると、$X'(t) = AX(t)$ が成り立つ。この時、$X(t) = \exp(tA)X(0)$ である。また、与えられた初期条件は $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と表せるので、$\boxed{2}$ を用いると $X(t) = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4e^{3t} + e^{-2t} \\ 12e^{3t} - 2e^{-2t} \end{pmatrix}$ となるので、第 1 成分を見て、答えは $y = 4e^{3t} + e^{-2t}$。

なお、第 2 成分 $y' = 12e^{3t} - 2e^{-2t}$ が検算になっている。

$\boxed{4}$ $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ と定義すると、$X_{n+1} = AX_n$ が成り立つ。この時、$X_n = A^n X_0$ である。ここで、$A^n = (P\Lambda P^{-1})^n = P\Lambda^n P^{-1}$ であるから、$X_n = P\Lambda^n P^{-1} X_0$ となる。ここまでは一般論なので計算は易しい。以下、具体的な数値を代入してみよう。

与えられた初期条件は $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と表せる。$\Lambda^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ である。これと $\boxed{1}$ の P, P^{-1} を代入すると、$X_n = \dfrac{4 \times 3^n + (-2)^n}{5}$.