

## 数学演習 AII—11 回目：対角化の応用

- ① 行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$  の固有多項式、固有値、各固有値に対する固有空間を求めよ。また、正則行列  $P$  で  $P^{-1}AP =: \Lambda$  が対角行列になるものを求めよ。
- ② 行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$  と実数  $t$  に対して、 $\exp(tA)$  を求めよ。
- ③ 微分方程式  $y'' - y' - 6y = 0$  の解  $y = y(t)$  で、 $y(0) = 1, y'(0) = 2$  を満たすものを求めよ。
- ④ 数列  $\{x_n\}$  で、漸化式  $x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n$  と初期条件  $x_0 = 1, x_1 = 2$  を満たすものを求めよ。

問題は以上。

出典

- ② p304, 例 B.2。  
③ p207, 例題 6.13。  
④ p208, 例題 6.14.

コメント：

- ② 公式  $\exp(PBP^{-1}) = P \exp(B)P^{-1}$  は用いて良い。
- ③  $X(t) = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$  と定義し、微分方程式を行列とベクトルを使って書き換える。その後：  
方法1  $X'(t) = AX(t)$  の解が  $X(t) = \exp(tA)X(0)$  であることは用いて良い。  
方法2 あるいは、 $Y(t) = P^{-1}X(t)$  と定義する、という方法もある (2通りの解法がある)。
- ④  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$  と定義するとよい。