

2022/12/14 配布

## 数学演習 AII—9 回目：線型写像の表現行列、固有値・固有ベクトル

- 1  $f_1(x) = e^{2x} \cos 3x, f_2(x) = e^{2x} \sin 3x$  と定める。 $\{f_1, f_2\}$  を基底とする線形空間を  $V$  とする。  
線型写像  $D = \frac{d}{dx} : V \rightarrow V$  の表現行列  $A$  を求めよ。

2  $Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  とする。

3 交代行列全体のなす線形空間を  $V$  とする。線型写像  $f : V \rightarrow V$  を  $f(X) = ZX - XZ$  と定める。  
 $V$  の基底  $\{E_1, E_2, E_3\}$  に関する  $f$  の表現行列  $A$  を求めよ。

- 3 次の行列  $A$  の固有多項式、固有値、固有値  $\lambda$  に対する固有空間  $W(\lambda)$  を求めよ。

また、適切な正則行列  $P$  で、 $P^{-1}AP = \Lambda$  が対角行列になるような  $P$  と  $\Lambda$  を求めよ。

(1)  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , ただし  $b \neq 0$  と仮定する。

(2)  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ .

(3)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

(4)  $A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & a+2 & a \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ .

問題は以上。

出典

- 1 p188, 練習問題 6.14(1) の類題。  
2 p188, 練習問題 6.15(2) の類題。  
3 (1) p193, 例 6.21.  
3 (3) p245, 練習問題 7.12(1).  
3 (4) p199, 練習問題 6.20.

コメント：

- 1  $D$  が線型写像であることは証明せずに認めて良い。  
2  $\{E_1, E_2, E_3\}$  が基底になることや、 $f$  が線型写像になることは証明せずに認めて良い。