2022/6/22 問題配布分

数学演習 IA 解答例—10 回目：線形独立、外積

$\boxed{1}$ 成分で表示すると、左辺は

$$(a_2b_3 - a_3b_2)(c_2b_3 - c_3b_2) + (a_3b_1 - a_1b_3)(c_3d_1 - c_1d_3) + (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1)$$

となり、これを展開すると、$\pm$ のついた 4 次式の 12 個の和に展開できる。右辺は、

$$(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) - (a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3)(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3d_3)$$

となり、$\pm$ のついた 4 次式の 18 個の和に展開できる。ただし、$a_1b_1c_1d_1, a_2b_2c_2d_2, a_3b_3c_3d_3$ はプラスマイナスが相殺して消えるので 6 項減って 12 項になる。残った項をきちんと書けば、左辺と一致していることを確認することができる。

$\boxed{2}$ (1) 実数 $x_1, \ldots, x_k$ を用いた線形関係 $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_{k-1}\mathbf{a}_{k-1} = \mathbf{0}$ を考える。これを、$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_{k-1}\mathbf{a}_{k-1} + 0\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ と見ると、「$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ が線形独立である」という仮定から $x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0$ が導かれる。従って、$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}$ の線形関係は自明なものしかないので、線形独立である。

(4) $1 \leq p < q \leq k$ が存在して $\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_q$ であるとする。この時、$1\mathbf{a}_p + (-1)\mathbf{a}_q = \mathbf{0}$ という非自明な線形関係が存在するので 2 本のベクトル $\mathbf{a}_p, \mathbf{a}_q$ は線形従属である。従って、(3) より、$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ は線形従属である。

(5) $1\mathbf{0} = \mathbf{0}$ なので、1 本のベクトル $\mathbf{0}$ は線形従属である。従って、(3) より、$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ は線形従属である。

$\boxed{3}$ (1) Yes.

(2) $r = 3$.

(3) Yes.

(4) ない。他の取り方をすると、零ベクトル $\mathbf{a}_4$ を必ず含んでしまうので、$\boxed{2}$(5) より線形従属。

(5) No. $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ が線形従属。

(6) Yes. 標準基底の最初の 3 本。

(7) No.

(8) Yes.

(9) 答えは 8.

説明：$\mathbf{a}_7$ は必ず選ぶ。$\mathbf{a}_2$ は必ず選ばない。残りの 5 本から線型独立な 2 本を選べば良い。選び方は ${}_5C_2 = 10$ 通りあるが、そのうち、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ という選び方と、$\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ という選び方の 2 つの場合が線形従属で、そのほかの $10 - 2 = 8$ 通りの場合に線形独立になる。

$\boxed{4}$ (i) まず、仮定「$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が線形独立」に $\boxed{2}$(2) を用いると「$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が線形独立」である。

(ii) 次に、「$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5$ が線形従属」なので、非自明な線形関係 $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{0}$ が存在する。

(iii) ここで仮に $x_5 = 0$ であるとすると、$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ という非自明な関係が存在することになるので、「$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が線形従属」になってしまうが、それは (i) の結論に矛盾する。従って $x_5 \neq 0$ である。

(iv) ゆえに、$\mathbf{a}_5 = -\frac{x_1}{x_5}\mathbf{a}_1 - \frac{x_2}{x_5}\mathbf{a}_2 - \frac{x_3}{x_5}\mathbf{a}_3$ となる。すなわち、$\mathbf{a}_5$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の線形結合である。つまり、$\mathbf{a}_5 = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3$ と書ける[*1]

(v) 以上の準備のもとで線形関係

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + y_3\mathbf{a}_3 + y_4(\mathbf{a}_4 + k\mathbf{a}_5) = \mathbf{0}$$

を考える。上で得た $\mathbf{a}_5$ の表示式を代入すると、

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + y_3\mathbf{a}_3 + y_4(\mathbf{a}_4 + k(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3)) = \mathbf{0}$$

となり、これを線形関係の形に整理すると

$$(y_1 + y_4kc_1)\mathbf{a}_1 + (y_2 + y_4kc_2)\mathbf{a}_2 + (y_3 + y_4kc_3)\mathbf{a}_3 + y_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$$

となる。仮定「$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が線形独立」より、

$$y_1 + y_4kc_1 = y_2 + y_4kc_2 = y_3 + y_4kc_3 = y_4 = 0$$

となる。$y_4 = 0$ より $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ も得られるので、４本のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 + k\mathbf{a}_5$ の線形関係は自明なものしか存在しないことがわかり、線形独立であることが示された。

[*1] $c_i = -\frac{x_i}{x_5}$ と置いたことになる。