

2022/7/20 配布

数学演習 IA—14 回目：行列式 (パラメターの入った行列)

1 次の行列 A, B, C, D の行列式を求めよ。なお、答えは因数分解してください。

$$A = \begin{pmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & x & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 1 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & x & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x & 0 \end{pmatrix}.$$

2 そして、1 の因数分解されたそれぞれの因子に対して、行列式が 0 であることが行列式の性質からすぐにわかる場合は、それを説明せよ。

3 $A = \begin{pmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。行列式 $\det(xE_5 - A)$ を求めよ。

4 A をサイズが n の正則行列とし、その余因子行列を \tilde{A} と書く。 $\det(\tilde{A}) = (\det A)^{n-1}$ を示せ。

問題は以上。

出典

- 1 練習問題 3.4(p97) (1)(2)(3)(5)。ただし小問は異なります。
- 2 例 3.24(p94) の類題。
- 3 例題 3.8(p87) の類題。同伴行列。
- 4 練習問題 3.12(p97)。

答案作成上のコメント：

- 1 当然のことですが、答えだけでなく途中の導出を書いてください。
 - 教員をあっと驚かすような解法も期待しています。
- 2 問題の意味が分かりづらいかと思うので、例で説明します。例えば、例題 3.3(1)(p77) であれば、「 $x = 1$ の時は第 1 列と第 2 列が一致する、 $y = 1$ の時は第 1 列と第 3 列が一致する、 $y = x$ の時は第 2 列と第 3 列が一致するので、行列式は 0 である。」のような理由づけを与えることが期待されています。
 - 答案を書く順序に関して、 A の $\boxed{1}\boxed{2}$ をして、次に B の $\boxed{1}\boxed{2}$ をして、... という順序で答案を書いてもいいですし、 $\boxed{1}$ を A, B, C, D の順に答えた後、 $\boxed{2}$ に順次取り掛かる順序で記載してもどちらでも良いです。
- 2 なお、必ずしも、因数分解に現れる全ての因子に対して簡単な理由づけが存在するわけではありません。問題の意図はやや曖昧です。
- 4 余裕のある人は、 A が正則行列でない場合も成立することを証明してみてください。