

数学演習 IA 解答例—6 回目：基本行列、基本変形

1 計算すると、 $\begin{pmatrix} 1+tx & x+y+txy \\ t & 1+ty \end{pmatrix}$ なので、 $x = y = -\frac{1}{t}$.

2 答えは $E_n(i, j)$.

4 定理 2.2 より、 m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在して $PAQ = B$ となる。この P, Q も左上ブロックが r 次正方行列となるようにブロック分けする。

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & O \\ \hline O & O \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} P_{11}A_{11}Q_{11} & P_{11}A_{11}Q_{12} \\ \hline P_{21}A_{11}Q_{11} & P_{21}A_{11}Q_{12} \end{array} \right)$$

なので、成分比較によって、

$$\begin{aligned} P_{11}A_{11}Q_{11} &= B_{11}, \\ P_{21}A_{11}Q_{11} &= B_{21} = O, \\ P_{21}A_{11}Q_{12} &= B_{22} \end{aligned}$$

となる。一つ目の等式に例題 2.3(p38) を用いると $A_{11}Q_{11}$ は正則行列である。2つ目の等式に右から $(A_{11}Q_{11})^{-1}$ をかけると、 $P_{21} = O$ となる。これを3つ目の等式に代入すると、 $B_{22} = O$ となる。