(f) (2)
結論

$$\begin{cases} \cdot\ \mathrm{Im}\, f_{E_{ij}} \text{ の次元} = 2(n-1) \\ \cdot\ \mathrm{Ker}\, f_{E_{ij}} \text{ の次元} = n^2 - 2(n-1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = (n-1)^2 + 1 \end{cases}$$

基底 ① $i=j$ のとき

$\mathrm{Im}\, f_{E_{ii}}$ の基底 $\begin{cases} E_{ik} & (k \neq i) \\ E_{ki} & (k \neq i) \end{cases}$

$(n-1) \times 2$ 個

$\mathrm{Ker}\, f_{E_{ii}}$ の基底 $\begin{cases} E_{kl} & (k \neq i \text{ かつ } l \neq i) \\ E_{ii} \end{cases}$

$(n-1)^2 + 1$ 個.

② $i \neq j$ のとき.

$\mathrm{Ker}\, f_{E_{ij}}$ の基底 $\begin{cases} E_{kl} & (k \neq j \text{ かつ } l \neq i) \\ E_{ii} + E_{jj} \end{cases}$

$(n-1)^2 + 1$ 個

$\mathrm{Im}\, f_{E_{ij}}$ の基底 $\begin{cases} E_{ik} & k \neq i, j \\ E_{kj} & k \neq i, j \\ E_{ij} \\ E_{ii} - E_{jj} \end{cases}$

$(n-2) \times 2 + 1 + 1 = 2(n-1)$ 個.

証明 ① $i = j$ のとき

あ $\mathrm{Ker}\, f_{E_{ii}} \ni E_{kl}$ ($k \neq i$ かつ $l \neq i$)

$\ni E_{ii}$ を示す。

い $\mathrm{Im}\, f_{E_{ii}} \ni E_{ik}$ ($k \neq i$)

E_{ki} ($k \neq i$) を示す。

う $\dim \mathrm{Ker}\, f_{E_{ii}} \geqq (n-1)^2 + 1$ (1)

$\dim \mathrm{Im}\, f_{E_{ii}} \geqq 2(n-1)$ (2)

$$\therefore \underbrace{\dim M(n, \mathbb{R})}_{n^2} = \dim \mathrm{Ker}\, f_{E_{ii}} + \dim \mathrm{Im}\, f_{E_{ii}}$$

$\geqq \{(n-1)^2 + 1\} + 2(n-1)$ (3)

$= n^2$.

従って (3) の不等号は等号であり

(1)(2) の不等号も等号.

証明2　① $i=j$ のとき.

$$\mathrm{Ker}\, f_{E_{ii}} = \left\langle \begin{array}{ll} E_{kl} & (k \neq i \text{ かつ } l \neq i) \\ E_{ii} & \end{array} \right\rangle$$ を示す。

⊃ と

⊂ を示す.

証明3　① $i=j$ のとき

$$\mathrm{Im}\, f_{E_{ii}} = \left\langle \begin{array}{ll} E_{ik} & (k \neq i) \\ E_{ki} & (k \neq i) \end{array} \right\rangle$$ を示す.

⊃ と

⊂ を示す。