

## 正定値であることの判定

狙い：実対称行列が、正定値であることの必要十分条件をまとめる。定理 6.4.3(p133) の拡充。

定理 6.4.3'

$A$  を  $n$  次の実対称行列とする。次は同値。

- (1)  $A$  は正定値。
- (2)  $A$  の固有値は全て正。
- (3)  $A$  の符号は  $(n, 0)$ .
- (4)  $A$  のシルベスター標準形 (p130) は単位行列。
- (5) ある直交行列  $P$  が存在して  ${}^tPAP$  は対角行列で、全ての対角成分が正。
- (6) ある正則行列  $P$  が存在して  ${}^tPAP$  は対角行列で、全ての対角成分が正。
- (7) ある上三角行列  $P$  が存在して  ${}^tPAP$  は対角行列で、全ての対角成分が正。
- (7) ある上三角行列  $P$  で対角成分が全て 1 であるものが存在して、  
 ${}^tPAP$  は対角行列で、全ての対角成分が正。
- (8)  $A$  の全ての主小行列式が正。すなわち、定理 6.4.3 の記号で、  
全ての  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して、 $\det A_k > 0$ .
- (9)  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して、 $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = {}^t\mathbf{u}A\mathbf{v}$  と定めると、写像 ( , ) は内積である。