

---

## 線形代数入門 練習問題 (60分ぐらい) (6/5)

---

氏名: \_\_\_\_\_

以下の問題を解きなさい。ノートは見てもよろしい。答えは最後に回収します。同じものを webpage におきます。

答えに自信がないときは相談しても良いが、まずは自分の力でやってみること。行列は全て（講義でやったように） $2 \times 2$  行列で考える。またベクトルは2次元の行ベクトル、または、列ベクトルを考える。講義中には列ベクトルを扱うことが多かったが、スペースの都合上、一部行ベクトルを使っているが本質的な違いはない。

[1] (A) まずは最初に習ったベクトルの1次独立や1次結合について自分の言葉で説明しなさい。

(B) 次のベクトルの組が1次独立か、それとも1次従属かを判定せよ。

$$(1) \{[1, 2], [2, 1]\} \quad (2) \{[2, -4], [-1, 2]\} \quad (3) \{[3, 4], [-4, 3]\}$$

(C) ベクトル  $U = [1, 0]$  と  $V = [1, -2]$  を上のベクトルの組の1次結合として表しなさい。表せないときはその理由を説明しなさい。

[解答] (A) 2つのベクトル  $U, V$  が1次独立とは2つのベクトルが同じ方向を向いていないことである。より正確には  $U = cV$  または  $V = cU$  をみたす数  $c$  が存在しないことである。1次従属とは1次独立でないことである。

(B) 定義に基づいて考えればよい。(1) と (3) は1次独立、(2) は1次従属。

(C) これは  $X, Y$  が与えられたベクトルとすると、 $U = \alpha X + \beta Y$  となるような  $\alpha, \beta$  を求めればよい。具体的には  $\alpha$  と  $\beta$  についての連立1次方程式になる。あとは行列を使っても良いし、普通に解いても良い。

$$(1) U = -\frac{1}{3}[1, 2] + \frac{2}{3}[2, 1], \quad V = -\frac{5}{3}[1, 2] + \frac{4}{3}[2, 1]$$

(2)  $U$  は1次結合として表せない。実際、 $\alpha[2, -4] + \beta[-1, 2] = (2\alpha - \beta)[1, -2]$  であり、どのように  $\alpha, \beta$  をとってもこのベクトルは  $[1, -2]$  の定数倍であるが、 $V$  はそのようなベクトルではない。一方  $V$  については  $2\alpha + \beta = 1$  であるとき  $V = \alpha[2, -4] + \beta[-1, 2]$ 。

$$(3) U = \frac{3}{25}[3, 4] + \frac{-4}{25}[-4, 3], \quad V = \frac{-1}{5}[3, 4] + \frac{-2}{5}[-4, 3]$$

2 行列の計算についての問題. 次のように置く

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

次の行列を計算せよ.

(1)  $A + 2B + 3C$

(2)  $AB + CB + AC + CC$  (分配法則を使おう.)

(3)  $ABC, BCA, CAB$

[解答] (1)  $A + 2B + 3C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

(2)  $AB + BC + AC + CC = (A + C)(B + C) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3)  $ABC = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad BCA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad CAB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

□3 逆行列の問題。次の関係をみたす行列  $X$  を全て求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(2) X \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

[解答] (1)  $X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$

$$(2) X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 17 & -11 \end{pmatrix}$$

$$(3) X = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ \beta & 2\beta \end{pmatrix} \quad \text{但し, } \alpha, \beta \text{ は } \alpha - \beta = 1 \text{ をみたす数.}$$

4 行列式についての問題. 積の公式を思い出そう. (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

とおくとき次の行列の行列式を求めよ.

$$A^4 \quad B^5 \quad (AB)^3 \quad ABA^{-1}B^{-1} \quad B^{-1}AB$$

(2) 一般に  $2 \times 2$  行列  $C$  と数  $\alpha$  について次を示せ.

$$|\alpha C| = \alpha^2 |C|,$$

[解答] (1)  $|A| = -2$ ,  $|B| = -5$  であるので

$$|A^4| = |A|^4 = (-2)^4, \quad |B^5| = |B|^5 = (-5)^5 = -3125, \quad |(AB)^3| = |AB|^3 = |A|^3 |B|^3 = 1000$$

$$|ABA^{-1}B^{-1}| = |A||B||A|^{-1}|B|^{-1} = 1, \quad |BAB^{-1}| = |B||A||B|^{-1} = |A| = -2.$$

(2) 定義に戻って考えれば明らか.

5 最後に連立1次方程式についての問題. 次のような連立1次方程式を考える.

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 4x + ay = 2 \end{cases}$$

(1) この連立1次方程式がただ一つの解を持つような  $a$  の範囲を求め, その場合の解を  $a$  を用いて表せ.

(2) (1) で求めた以外の場合に解が存在すれば求めよ.

[解答] 連立1次方程式は

$$AX = P, \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表される.

(1) 講義で習った定理から解がただ一つであるための必要十分条件は  $|A| = a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2) \neq 0$ .

よって  $a \neq \pm 2$  のとき解がただ一つ存在し, 解は

$$X = A^{-1}P = \frac{1}{a^2 - 4} \begin{pmatrix} a & -1 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a + 2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

つまり  $x = \frac{1}{a+2}, y = \frac{2}{a+2}$ .

(2)  $a = 2$  のときは  $2x + y = 1$  をみたす数の組  $(x, y)$  全てが解になる.

$a = -2$  のときは解は存在しない.

6 講義中は行列の成分は実数だったが複素数でも問題ない。(慣れの問題) 後で少しでてくるので、そのときに慌てないように練習しておこう。次の行列を考える。

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

次の関係を確かめよ。

$$I^2 = J^2 = K^2 = E. \quad (I^2 \text{ 等は } II \text{ を表す。} E \text{ は単位行列。})$$

$$IJK = -E$$

$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J$$

7 講義についての質問・要望があればどうぞ。レポートについて何度か質問を受けたので書いておきます。

- 提出は期末試験と同時。自筆で A4 版のレポート用紙で表紙をつけて提出。(期末試験中はそれを見ても良い。)
- 講義内容について、自分の理解のまとめとして書く。スペースがあれば練習問題を書く。
- 私に説明するのではなく、線形代数について知らない人に説明するつもりで書くこと。
- もちろん本を参考にしてもよい。友達と相談しても良い。ただ、最後は「自分の言葉で」書くこと。
- 各講義 4 ページ程度。全体で 40~50 ページになるはず。