線形代数入門 練習問題 (60 分ぐらい)　　(6/5)

氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

以下の問題を解きなさい．ノートは見てもよろしい． 答案は最後に回収します．同じものを webpage におきます．

答えに自信がないときは相談しても良いが，まずは自分の力でやってみること．行列は全て（講義でやったように） 2×2 行列で考える．またベクトルは 2 次元の行ベクトル，または，列ベクトルを考える．講義中には列ベクトルを扱うことが多かったが，スペースの都合上，一部行ベクトルを使っているが本質的な違いはない．

$\boxed{1}$ (A) まずは最初に習ったベクトルの 1 次独立や 1 次結合について自分の言葉で説明しなさい．

(B) 次のベクトルの組が 1 次独立か，それとも 1 次従属かを判定せよ．

$$(1)\quad \{[1,2],[2,1]\} \qquad (2)\quad \{[2,-4],[-1,2]\} \qquad (3)\quad \{[3,4],[-4,3]\}$$

(C) ベクトル $U = [1,0]$ と $V = [1,-2]$ を上のベクトルの組の 1 次結合として表しなさい．表せないときはその理由を説明しなさい．

[**解答**] (A) 2 つのベクトル U, V が 1 次独立とは 2 つのベクトルが同じ方向を向いていないことである．より正確には $U = cV$ または $V = cU$ をみたす数 c が存在しないことである． 1 次従属とは 1 次独立でないことである．

(B) 定義に基づいて考えればよい． (1) と (3) は 1 次独立，(2) は 1 次従属．

(C) これは X,Y が与えられたベクトルとするとき，$U = \alpha X + \beta Y$ となるような α, β を求めればよい．具体的に書けば α と β についての連立 1 次方程式になる．あとは行列を使っても良いし，普通に解いても良い．

(1)$U = -\dfrac{1}{3}[1,2] + \dfrac{2}{3}[2,1], \quad V = -\dfrac{5}{3}[1,2] + \dfrac{4}{3}[2,1]$

(2)U は 1 次結合として表せない．実際，$\alpha[2,-4] + \beta[-1,2] = (2\alpha - \beta)[1,-2]$ であり，どのように α, β をとってもこのベクトルは $[1,-2]$ の定数倍であるが，V はそのようなベクトルではない． 一方 V については $2\alpha + \beta = 1$ であるとき $V = \alpha[2,-4] + \beta[-1,2]$.

(3)$U = \dfrac{3}{25}[3,4] + \dfrac{-4}{25}[-4,3], \quad V = \dfrac{-1}{5}[3,4] + \dfrac{-2}{5}[-4,3]$

$\boxed{2}$ 行列の計算についての問題．次のように置く

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

次の行列を計算せよ．

(1) $A + 2B + 3C$

(2) $AB + CB + AC + CC$ （分配法則を使おう．）

(3) ABC, BCA, CAB

[**解答**] (1) $A + 2B + 3C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $AB + BC + AC + CC = (A + C)(B + C) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $ABC = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $BCA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $CAB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$　逆行列の問題．次の関係をみたす行列 X を全て求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $X \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

[**解答**] (1)$X = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$

(2)$X = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 17 & -11 \end{pmatrix}$

(3)$X = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ \beta & 2\beta \end{pmatrix}$　　但し，α, β は $\alpha - \beta = 1$ をみたす数．

$\boxed{4}$ 行列式についての問題．積の公式を思い出そう．(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

とおくとき次の行列の行列式を求めよ．

$$A^4 \qquad B^5 \qquad (AB)^3 \qquad ABA^{-1}B^{-1} \qquad B^{-1}AB$$

(2) 一般に 2×2 行列 C と数 α について次を示せ．

$$|\alpha C| = \alpha^2 |C|,$$

[**解答**] (1)$|A| = -2$, $|B| = -5$ であるので

$$|A^4| = |A|^4 = (-2)^4, \quad |B^5| = |B|^5 = (-5)^5 = -3125, \quad |(AB)^3| = |AB|^3 = |A|^3|B|^3 = 1000$$

$$|ABA^{-1}B^{-1}| = |A||B||A|^{-1}|B|^{-1} = 1, \qquad |BAB^{-1}| = |B||A||B|^{-1} = |A| = -2.$$

(2) 定義に戻って考えれば明らか．

$\boxed{5}$ 最後に連立 1 次方程式についての問題．次のような連立 1 次方程式を考える．

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 4x + ay = 2 \end{cases}$$

(1) この連立 1 次方程式がただ一つの解を持つような a の範囲を求め，その場合の解を a を用いて表せ．

(2) (1) で求めた以外の場合に解が存在すれば求めよ．

[**解答**] 連立 1 次方程式は

$$AX = P, \qquad A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表される．

(1) 講義で習った定理から解がただ一つであるための必要十分条件は $|A| = a^2 - 4 = (a-2)(a+2) \neq 0$.

よって $a \neq \pm 2$ のとき解がただ一つ存在し，解は

$$X = A^{-1}P = \frac{1}{a^2-4} \begin{pmatrix} a & -1 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a+2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

つまり $x = \frac{1}{a+2}$, $y = \frac{2}{a+2}$.

(2) $a = 2$ のときは $2x + y = 1$ をみたす数の組 (x, y) 全てが解になる．

$a = -2$ のときは解は存在しない．

$\boxed{6}$ 講義中は行列の成分は実数だったが複素数でも問題ない．(慣れの問題)　後で少しでてくるので，そのときに慌てないように練習しておこう．次の行列を考える．

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

次の関係を確かめよ．

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E. \quad (I^2 \text{ 等は } II \text{ を表す．} E \text{ は単位行列.})$$

$$IJK = -E$$

$$IJ = -JI = K, \qquad JK = -KJ = I, \qquad KI = -IK = J$$

$\boxed{7}$ 講義についての質問・要望があればどうぞ．　レポートについて何度か質問を受けたので書いておきます．

- 提出は期末試験と同時．自筆で A4 版のレポート用紙で表紙をつけて提出.（期末試験中はそれを見ても良い.）
- 講義内容について，自分の理解のまとめとして書く．スペースがあれば練習問題を書く．
- 私に説明するのではなく，線形代数について知らない人に説明するつもりで書くこと．
- もちろん本を参考にしてもよい．友達と相談しても良い．ただ，最後は「自分の言葉で」書くこと．
- 各講義 4 ページ程度．全体で 40〜50 ページになるハズ．