

1 次の極限を求めよ。(30点)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)\sin x - x \cos x}{x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

2 双曲線関数 $\sinh(x) := (e^x - e^{-x})/2$ について以下の問いに答えよ。(30点)

(1) $\sinh(x)$ の逆関数が $(-\infty, \infty)$ で定義できることを説明せよ。

(2) $y = \sinh(x)$ の逆関数を $x = f(y)$ とするとき、導関数 $f'(y)$ を求めよ。

(3) 関数 $\sinh(x)$ の逆関数について、増減と凹凸を調べてグラフの概形を描け。

3 関数 $f(x) = \tan^{-1}(x)$ について以下の問いに答えよ。(40点)

(1) $x > 0$ で次が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{1+x^2} < f(x) < x$$

(2) 次を示せ。

$$(x^2 + 1)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

(ヒント： $(x^2 + 1)f'(x) = 1$ を示し、ライプニッツの公式を用いる.)

(3) 関数 $f(x) = \tan^{-1}(x)$ のマクローリン展開を求めよ。(ただし、剰余項は $f^{(n)}$ を用いて表しておいてよい.)

(4) 次の関数が $x = 0$ で極値をとるかどうかが調べよ。

$$g(x) = x \cdot \tan^{-1}(x) - (\sin x)^2$$