

1 次の極限を求めよ。(30 点)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ (ヒント: 対数をとって考える.)

2 関数 $f(x) = \log(1+x)$ について以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) $x \geq 0$ の範囲で次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$$

(2) $f(x)$ の有限マクローリン展開を求めよ.

(3) 次の関数が $x=0$ で極値を取るかどうか (漸近展開を用いて) 調べよ.

$$g(x) = x^2 \log(1+x) - x^3$$

3 三角関数および逆三角関数について以下の問いに答えよ。(40 点)

(1) 逆三角関数 $\text{Sin}^{-1}(x)$ の定義について簡潔に説明せよ.

(2) $\text{Tan}^{-1}x$ のグラフの概形を描け.

(3) 次の方程式を解け.

$$\text{Cos}^{-1}x = \text{Sin}^{-1}\frac{1}{3} + \text{Sin}^{-1}\frac{7}{9}$$

(4) 次の関数の微分を求めよ.

$$\text{Sin}^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$