微分積分学 A　　中間テスト

[注意] それぞれの問題で，どのようにして結論が得られるかを書くこと．答えだけでは駄目．

$\boxed{1}$　次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$

解答　(1) $\tan x=\sin x/\cos x$ を代入すれば,

$$\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

である．そこで

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to 0}\cos x=1$$

と極限の基本的性質から

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$$

(2) 定義から極限は関数 $\arcsin x$ の $x=0$ での微分である．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=(\arcsin)'(0)=1.$$

別解：変数 y を $y=\arcsin x$ で導入すると $x\to 0\iff y\to 0$ であり,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$$

$\boxed{2}$　余弦関数 $\cos(x)$ を <u>閉区間 $[0, \pi]$ の上だけで考えて</u>，その逆関数として逆余弦関数 $\arccos(\cdot)$ を定義する．以下の問いに答えよ．

(1) なぜ余弦関数を閉区間 $[0, \pi]$ の上だけで考えるのか？簡潔に説明せよ．

(2) 逆余弦関数 $\arccos(\cdot)$ の微分および 2 階微分を求めよ．

(3) 逆余弦関数 $\arccos(\cdot)$ のグラフの概形を描け．(増減や凹凸について書き入れること.)

解答　(1) 関数 $\cos(x)$ は実数全体で考えると単射ではなく逆関数を考えることはできない．しかし，より小さな区間に制限すればその上で単射になって逆関数を定義することができることもある．実際，$\cos(x)$ を区間 $[0, \pi]$ に制限すれば $(0, \pi)$ において $(\cos(x))' = \sin x > 0$ であるので，強増加な関数となるので逆関数が定義され，　（中間値の定理から）逆関数は区間 $[0, 1]$ で定義された関数になる．

(2) 逆関数の微分法則から $y = \cos x$ とおいて，$x \in [0, \pi]$ に注意すれば

$$\arccos'(x) = \frac{1}{(-\sin y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

である．もう一度微分すれば

$$\arccos''(x) = -\frac{-x}{\sqrt{(1 - x^2)^{3/2}}}$$

(3) 関数 $\cos(x)$ のグラフを $[0, \pi]$ に制限したものを直線 $y = x$ を軸に対称移動したものになる．詳細は省略.

$\boxed{3}$　光の速度は空気中では $v_1 > 0$，水中では $v_2 > 0$ であるとする．水面より上にある 1 点 P_1 から水面の下にある 1 点 P_2 まで，光が最短時間の経路を通って進むという事実（フェルマーの原理）から，光の水面への入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 は

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

をみたすこと（スネルの法則）を示せ．ただし，入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 は下の図の角度である．

解答　（この問題は教科書の節末問題に出ている．そこの図も参照せよ.）
適当に座標を設定して，水面が x-軸，$P_1 = (0, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ とする．ただし $x_2 > 0$, $y_1 > 0$, $y_2 < 0$ とする.（座標の設定によってこのように仮定できる.）点 P_1 を発した光が点 $X = (x, 0)$ で水面に到達したとして，その経路を通ったときの所要時間は

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_1^2}}{v_2}$$

この関数 $f(x)$ の微分を計算すれば

$$f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + y_1^2}} + \frac{x - x_2}{v_2\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_1^2}}$$

と

$$f''(x) = \frac{y_1^2}{v_1(x^2 + y_1^2)^{3/2}} + \frac{y_2^2}{v_2((x_2 - x)^2 + y_1^2)^{3/2}}$$

である．全ての x で $f''(x) > 0$ であり，かつ，$f'(0) < 0$, $f'(x_2) > 0$ であるので，ある $0 < x_0 < x_2$ において $f'(x_0) = 0$ が成り立ち，その点で $f(x)$ は最小値をとることがわかる．フェルマーの原理を認めれば，このことは光は点 $(x_0, 0)$ において水面に入射することを意味する．このとき

$$0 = f'(x_0) = \frac{x_0}{v_1\sqrt{x_0^2 + y_1^2}} + \frac{x_0 - x_2}{v_2\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_1^2}} = \frac{\sin\theta_1}{v_1} + \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

であるのでスネルの法則が従う．

$\boxed{4}$　次の定理（Cauchy の平均値の定理）を証明せよ．

定理　区間 $[a,b]$ で定義された連続な関数 $f(x)$ と $g(x)$ が，ともに開区間 (a,b) で微分可能であり，かつ，関数 $g(x)$ が開区間 (a,b) 上で $g'(x)>0$ をみたすならば，ある $c\in(a,b)$ について

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

が成り立つ．

解答（証明)　平均値の定理より

$$g(b)-g(a)=g'(d)(b-a)$$

をみたす点 $d\in(a,b)$ が存在する．仮定より $g'(d)>0$ であるので $g(b)-g(a)>0$ である．

そこで $k=(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a))$ とおき，関数

$$F(x)=\{f(x)-f(a)\}-k\{g(x)-g(a)\}$$

を考える．関数 $f(x)$, $g(x)$ が $[a,b]$ 上で連続で (a,b) 上で微分可能であるので，$F(x)$ についても同様である．　定義から明らかに $F(a)=0$ であり，かつ，k の取り方から $F(b)=0$ である．つまり，関数 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ にロルの定理の仮定をみたす．したがって，ある $c\in(a,b)$ が存在して

$$0=F'(c)=f'(c)-kg'(c)$$

ことがわかる．k の定義からこれは

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

と同じことである．