線形代数・中間試験・問題用紙

2019 June 21(金曜２限)

解答用紙の使い方

- 解答用紙は A4 を縦に用いる。各用紙の おもての上部 に氏名と学籍番号を書くこと。
- $\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ の全問に解答せよ。
- 問題の番号など、例えば $\boxed{6}$(a) などを明記すること。
- おもて面で足りない場合は裏面を使用すること。さらにそれでも足りない場合は、２枚目以降を使うこと。２枚使う場合は、解答用紙の おもて面の右上 にそれぞれ 1/2, 2/2 と記すこと。３枚ならば 1/3, 2/3, 3/3。

禁止事項：

- 不正行為は禁止する。
- また、不正行為と紛らわしい行為を禁ずる。

  例：電話は通信機器であり、データを記録することもできるので、机の上に置いたりポケットや机の引き出しに入れたりしてはいけない。

  例：机の引き出しに教科書やノートや紙類などをむき出しに入れてはいけない。

  これらは、鞄の中に入れること。鞄を持っていない場合は、教室左隅前方に置くこと。
- 飲食物の持ち込みと利用を禁ずる。

出題に関するメッセージ：

- 途中の計算、論証、説明、理由などを書くこと。
- 教科書の用語 rref (row echelon form) は階段行列とも呼ばれる。行変形に関する標準形の形の行列のことである。

$\boxed{1}$ 連立方程式 $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 11x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$ の解を求めよ。

$\boxed{2}$ 連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に対して、$(A\ \mathbf{b})$ を行基本変形で標準形にした行列 (rref, 階段行列) が

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

であるとする。この時、連立方程式の解を求めよ。

$\boxed{3}$ 連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に対して、$(A\ \mathbf{b})$ を行基本変形で標準形にした行列 (rref, 階段行列) が

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

であるとする。この時、連立方程式の解を求めよ。

$\boxed{4}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

$\boxed{5}$ A を正則行列とする。A の転置行列 ${}^tA$ も正則であることを示せ。

$\boxed{6}$ n 次正方行列 A が rref だとする。

(a) A の第 n 行が零ベクトルでなければ、A のピボットの個数が n 個であることを示せ。

(b) A のピボットの個数が n 個であれば、A は単位行列であることを示せ。

$\boxed{7}$ (a) ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ の外積 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ を求めよ。

(b) 問題 (a) の答えを $\mathbf{u}$ とする。内積 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ を求めよ。

(c) $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 並びにベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で定まる平行六面体の体積を求めよ。

問題は以上

補足：

- $\boxed{6}$ rref の定義を復習せよ。また (b) は (a) を使って示すのではなく、(a)(b) は別個の問題である。

中間試験解答例

2019 June 21 (金２)

$\boxed{1}$ $(A\ \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 7 & 5 & 11 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$ の rref を計算すると、$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. したがって

解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_3 - 1 \\ -2x_3 - 1 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ $x_2 = 3x_5 + 2,\ x_4 = -x_5 - 4,\ x_6 = 5$ なので、解は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_5 + 2 \\ x_3 \\ -x_5 - 4 \\ x_5 \\ 5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ 最後の行から $0 = 5$ となるので 解なし。

$\boxed{4}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{5}$ 公式 ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ を用いる。B を A の逆行列とすると $AB = BA = I_n$ なので

$$I_n = {}^tI_n = {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA,$$
$$I_n = {}^tI_n = {}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB.$$

したがって、${}^tB$ は ${}^tA$ の逆行列であり、${}^tA$ は正則である。 □

$\boxed{6}$ 必ずしも全部を書く必要はないが、rref の性質を「...」に挙げつつ証明していく。

(a) 「rref の零ベクトルは一番下にまとまっている」ので、仮定 (= 一番下の行が零ベクトルではない) より、どの行も零ベクトルではない。したがって、(「零ベクトルでない行には必ずピボットが存在する」から) どの行にもピボットが存在するので、ピボットの個数は n 個である。

(b) 「ピボットは各行に高々１つしかない」ので、すべての行にピボットが存在する。「ピボットは左上から右下に並んでいる」ので対角成分に並ぶ。「ピボットの値は 1」 である。「ピボットのある列はピボット以外の成分は 0 」なので対角成分以外の成分は 0 である。したがって、A は単位行列である。

$\boxed{7}$ (a) $\begin{pmatrix} 6+18 \\ -15-12 \\ 30-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -27 \\ 22 \end{pmatrix}.$

(b) 0. 理由 $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{w} = 0$. あるいは直接計算して、$120 - 54 - 66 = 0$.

(c) $\mathbf{u}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の内積は $24 - 27 - 22 = -25$. したがって、体積はその絶対値なので 25.