中間試験への補足

問題6 質問 $n \geq 3$ の時に、どう考えればよいか？

答 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ として $\begin{cases} AB = BA \\ \mathrm{tr}\, B = 0 \end{cases}$ を解いて、B がどのような形に書けるかを考えてみましょう

$n=4$ のときは $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $n=5$ のときは $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ など。

問題10 質問 「$a=b$ ならば $c=d$」かどうか。

答: 拡大係数行列 $B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ とします。

このとき D を計算し、a, b, c, d を求めます。

問題10 質問 「$c=d$ ならば $a=b$」かどうか。

答 P51, ℓ6 (2) を見ます。$c=d$ のときは、拡大係数行列 B に対応する

(あ) 連立1次方程式は必ず解を持ちます。

(い) 一方で、$a \neq b$ ならば B の最後の列に必ず主成分がありますから、
$(0, 0, \cdots, 0 \mid *)$ という行が B に存在します。($*$ は0でない数。)
このとき、拡大係数行列 B に対応する連立1次方程式は解を持ちません。
対偶を考えると、「Bに対応する連立1次方程式が解をもつ $\Rightarrow a=b$」です。

(う) この(あ)と(い)を組み合わせます。

__問題8__　どこが不明ポイントかわからないので，いくつかポイントを書きます．

(あ)　P46．練習問題 2.8(2) $\boxed{\mathrm{rank}(A+B) \leqq \mathrm{rank}\,A + \mathrm{rank}\,B}$ を用います。

$A = X+Y$，　$B = -Y$ とすると，

その式で，

$$\mathrm{rank}\,X \leqq \mathrm{rank}(X+Y) + \mathrm{rank}(-Y)$$

が得られます．$\mathrm{rank}(-Y) = \mathrm{rank}\,Y$ ですから，移項すると，

公式　$\mathrm{rank}(X+Y) \geqq \mathrm{rank}\,X - \mathrm{rank}\,Y$

が得られます。これを $X=A$，$Y=B$ に適用すると，

$\boxed{\mathrm{rank}(A+B) \geqq \mathrm{rank}\,A - \mathrm{rank}\,B}$ が得られます。

(い)　階数は行列のサイズ以下です．

以上の(あ)(い)で $\mathrm{rank}(A+B)$ の取りうる値を，しぼり込むことができます

(必要条件)

(ラ). 一方で、上で求めた範囲の値を実際に取りうることを示すには、

簡単な対角行列を用います。

$$A=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

として、

$$B=\begin{pmatrix} a&0&0&0&0&0\\ 0&b&0&0&0&0\\ 0&0&c&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$(a,b,c)=(1,1,1)$
$=(1,1,-1)$
$=(1,-1,-1)$
$=(-1,-1,-1)$

や

$$B=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&a&0&0\\ 0&0&0&0&b&0\\ 0&0&0&0&0&c \end{pmatrix}$$

を考えてみましょう。

前頁で求めた全ての値が実現できていれば、それらが答です。