定理 9.1.4.(1) の証明の途中の式変形.

準備 一般に 内積の第1成分に1次結合が入っている時.

$$(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_r\mathbf{u}_r, \mathbf{v})$$

$$= (c_1\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (c_2\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) + \cdots + (c_r\mathbf{u}_r, \mathbf{v})$$

$$= c_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + c_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) + \cdots + c_r(\mathbf{u}_r, \mathbf{v})$$

と「分配法則」が成り立つ。

$$(c_1\mathbf{u}_1 - c_2\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$$

$$= (c_1\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (-c_2\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$$

$$= c_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (-c_2)(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$$

$$= c_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - c_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$$

なども成立するので, 符号が負でもOK。

(1) の5行め.

$$(\mathbf{w}', \mathbf{u}_j) = (\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u}_j)$$

$$= \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{r} (\mathbf{v}, \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\right)$$

$$= (\mathbf{v} - (\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 - \cdots - (\mathbf{v}, \mathbf{u}_r)\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_j)$$

$$= (\mathbf{v}, \mathbf{u}_j) - (\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_j) - \cdots - (\mathbf{v}, \mathbf{u}_r)(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_j).$$

これは6行めである。

10/8

6行めをもう一度書く.

$$(v, u_j) - (v, u_1)\underbrace{(u_1, u_j)}_{=0} - \cdots - (v, u_{j-1})\underbrace{(u_{j-1}, u_j)}_{=0}$$

$$- (v, u_j)\underbrace{(u_j, u_j)}_{=1} - (v, u_{j+1})\underbrace{(u_{j+1}, u_j)}_{=0} - \cdots$$

$$- (v, u_r)\underbrace{(u_r, u_j)}_{=0}$$

$= (v, u_j) - (v, u_j)$: 7行めの左側

$= 0$: 7行めの右側