補足１：オーダー

■収束の「速さ」　関数や数列がある値に収束する，または，無限大に発散するというときに，それらが「どれぐらい早く収束するか？」ということが問題になることが多い．例えば２つの数列

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{n^2}$$

を考えると，これらは $n \to 0$ でともに 0 に収束するが,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

であるから，「$\{b_n\}$ の方が $\{a_n\}$ よるずっと速く 0 に近づくと言える．同様に

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x^2$$

という二つの関数の $x \to 0$ での極限はともに 0 であるが，実際には $g(x)$ のほうが $f(x)$ よりもずっと早く 0 に近づく．つまり，0 に収束するといってもその速さにはいろいろある．

■オーダー　数列や関数の収束（または発散）の速さを表す言葉の一つに「オーダー（order)」という概念がある．ともに 0 に収束する（または ∞ に発散する）数列 a_n と b_n について，ある定数 $0 < c < C$ があって，十分大きな n について

$$c < \frac{a_n}{b_n} < C$$

が成り立つときに数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ は同じオーダーという．同様に，$x \to 0$ で 0 に収束する関数 $f(x)$ と $g(x)$ について，ある定数 $0 < c < C$ があって，$|x|$ が十分小さいときに

$$c < \frac{f(x)}{g(x)} < C$$

が成り立つならば，$f(x)$ と $g(x)$ は同じオーダーという．これらは数列や関数の収束（発散）が「ほぼ同程度の速さ」であることを意味している．例えば

- $n \to \infty$ での極限において $a_n = 2n^2 + n + 1$ と $b_n = n^2$ は同じオーダー．
- $x \to 0$ での極限において $f(x) = x^2$ と $g(x) = x^2 + x^3$ は同じオーダー．

ということになる．

■ランダウの記号　オーダーに関係する記号としてランダウの記号というものがある．以下 $x \to 0$ で 0 に収束する関数に限って述べるが他の場合も同様である．２つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が 0 に収束する時,

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \iff \text{ある定数 } C > 0 \text{ があって，} |x| \text{ が十分小さい時 } |f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$$

と定義する．($\mathcal{O}$ は筆記体の大文字の O（オー）であり，ビッグオーと呼ばれる．) 例えば

$$x^3+2x^2+x=\mathcal{O}(x), \qquad x^3+2x^2=\mathcal{O}(x^2),$$

であり，$f(x)$ と $g(x)$ が同じオーダーであることは「$f(x)=\mathcal{O}(g(x))$ かつ $g(x)=\mathcal{O}(f(x))$」であることと同じである．

同様に

$$f(x)=o(g(x)) \iff \text{ある定数 } C>0 \text{ があって，} \lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=0$$

と定義する．(o は小文字の o（オー）であり，スモールオーと呼ばれる．) これは $x\to 0$ における極限を考えるときに関数 $f(x)$ が $g(x)$ に比べてずっと速く 0 に近づくことを意味する．例えば

$$x^3+2x^2=o(x), \qquad x^3=o(x^2)$$

である．

オーダーの概念やランダウの記号は関数の極限などを考えるときに非常に便利であるのでよく使われる．ただし，厳密な証明にはあまり向いていない．大事なのは「収束（発散）の速さを区別する」という考え方である．たとえば

$$\lim_{x\to 0} x+2x^2+x^3=0$$

と書いたときに，単に 「右辺が 0 に近づく」というだけでなく，$|x|$ が小さくなるとき，「第 2 項 x^2 が第 1 項 x よりずっと小さく，さらに，第 3 項 x^3 はそれよりずっと小さくなることから，右辺の大きさはほぼ x と同じ大きさになる」という感覚を持つことは微分積分を良く理解する上で非常に重要である．

■微分　関数の微分係数は

$$f'(p)=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$$

で定義されるが，これは

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(p+h)-f(p)}{h}-f'(p)\right)=0$$

さらに

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)-f'(p)\cdot h}{h}=0$$

と書き直すことができるから，上で導入したランダウの記号を使うと

$$f(p+h)-f(p)-f'(p)\cdot h=o(h)$$

と表すことができる．さらに（多少記法に融通を利かせて）

$$f(p+h)=f(p)+f'(p)\cdot h+o(h) \tag{1}$$

と書くと，次のように解釈できる：$f(p+h)$ の $f(p)$ からのずれは

「h に比例する項 $f'(p)\cdot h$」＋ $|h|$ に比べてずっと小さくなる（誤差）項「$o(h)$」

になる．つまり微分係数は $f(x)$ の値を p の近くで 1 次関数で（最もうまく）近似したときの 1 次の項の係数であると言える．このような考え方は例えば後期に多変数の関数の微分について考えるときにも重要になる．

さてここで問題．それでは 2 次関数で近似することを考えるとどうなるだろうか？これはこの講義の前期の最後に現れるテーラー展開を考える動機である．テーラー展開は教科書の後ろの方に載っているが，とりあえず自分で考えてみて欲しい．例えば (1) を一般化して

$$f(p+h) = f(p) + a\cdot h + b\cdot h^2 + o(h^2)$$

となるようにするには a と b はどのような値にとれば良いだろうか？もちろん，一般には（定理になるぐらいだから）難しい．それでも例えば $f(x)$ が多項式だったらどうかとか，考えてみると良いだろう．