数学２B　　練習問題　　No.1

$\boxed{1}$ 次の言葉，記号について説明せよ．

複素数，実部，虚部，複素共役，極表示（極形式），偏角，偏角の主値，絶対値，
オイラーの公式，ドモアブルの公式，べき根，領域 *, arg と Arg,

また，次の事柄について説明せよ．

(1) 2 つの複素数 α, β の極座標と積 $\alpha\beta$ および商 α/β の極座標の関係.

(2) 複素数 α の極座標とべき乗 α^n の極座標の関係.

(3) 複素数 α の極座標とべき根 $\sqrt[n]{\alpha}$（つまり $z^n = \alpha$ の解）の極座標の関係.

(4) 複素数 α とその複素共役 $\overline{\alpha}$ の極座標の関係.

$\boxed{2}$ 次の値を (a) 通常の計算と (b) 極座標をつかった幾何学的な方法で求めよ．

$$(a)\ (1+\sqrt{3}i)^3 \qquad (b)\ \frac{1+i}{1-i} \qquad (c)\ \ (1+i)^5$$

$\boxed{3}$ 次の値（複素数）を求めて，複素平面上に図示せよ．

$$(a)\ \left(\frac{6+8i}{4-3i}\right)^2 \qquad (b)\ \sqrt[4]{-4}$$ （これは $z^4 = -4$ の 4 つの解を表す.）

$\boxed{4}$ 次の方程式の解を求めて，複素平面上に図示せよ．

(1) $z^3 = 1+i$,

(2) $z^2 + (7+i)z + 24 + 7i = 0$.（ヒント：平方完成）

$\boxed{5}$ 次の等式と不等式を示せ．

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2, \qquad |z+w| \le |z| + |w|$$

★ 教科書の問題 1.1，1.2 も参照

数学２B　　練習問題　　No. 2

$\boxed{1}$ 次の事柄について説明せよ．

(1) 複素変数の指数関数 e^z と三角関数（$\sin z, \cos z, \tan z$）の定義．

(2) 対数関数 $\ln(z)$ と対数関数の主値 $\mathrm{Ln}(z)$.

(3) 一般ベキ z^α の定義とその多価性．

$\boxed{2}$ 次の等式を確かめよ．

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}, \qquad \arg e^z = \mathrm{Im}(z).$$

$\boxed{3}$ 次の等式を確かめよ．

$$\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w).$$

また同様な $\sin(z+w)$ についての等式を導け．

$\boxed{4}$ 次の値を求めよ．

(1) $\cos(1+i)$

(2) $\sin \pi i$

(3) $\ln i$

(4) i^i

$\boxed{5}$ 次の方程式の解を全て求めよ．

(1) $\cos z = 3i$

(2) $\cosh z = 0$

★ 教科書の１．６節の節末問題 1 15，１．７節の節末問題）3 6，9 11，１．８節の節末問題 (p46) 5 18 も参照．

数学２B　　練習問題　　No.3

$\boxed{1}$ 次の事柄について説明せよ.

(1) 複素変数の関数が解析的（正則）であることの定義とコーシー・リーマンの関係式（方程式）

(2) 解析関数と調和関数の関係と共役調和関数

$\boxed{2}$ 次を示せ.

(1) コーシー・リーマンの関係式から解析関数の実部，虚部が調和関数になること

(2) u が調和関数で v が u の共役調和関数であるとき，u は $-v$ の共役調和関数であること.

$\boxed{3}$ 正則関数 $f(z)$ を極座標 (r, θ) を用いて

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta), \quad z = re^{i\theta}$$

と表すとき，コーシー・リーマンの関係式は

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta, \qquad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$$

と表されることを示せ. (教科書 p25 参照)

$\boxed{4}$ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が解析関数であるとき，次を示せ.

$$f'(z) = u_x - iu_y = v_u + iv_x$$

$\boxed{5}$ 調和関数 $u(x, y)$ に対して，共役調和関数 $v(x.y)$ を求める方法を説明し，次の場合に共役調和関数を求めよ．また，対応する解析関数を求めよ.

(1) $x^2 - y^2$

(2) $e^x \cos y$

(3) $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$

$\boxed{6}$ 与えられた関数が調和関数であるように a, b を定め，共役調和関数を求めよ.

(1) $u = ax^3 + xy^2$.

(2) $u = e^{ax} \cos y$.

★ 教科書の１．４節の節末問題 (p27) 1 12, 17 28

数学２B　　練習問題　　No.4

$\boxed{1}$　次の事柄について説明せよ．

(1) 等角写像の定義

(2) 解析関数と等角写像，調和関数の関係

$\boxed{2}$　次を示せ．

(1) 解析関数 $f(z)$ が臨界点 ($f'(z) = 0$ なる点）以外で等角であること．

(2) 調和関数 $\varphi(z)$ と解析関数 $f(z)$ の合成 $\varphi(f(z))$ が調和関数であること．

$\boxed{3}$　次の曲線を描け．また（別の図に）曲線の写像 $z \mapsto z^2$ による像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 1, 2, 3.$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pi/4, \pi/3, -\pi/2.$

(3) $\mathrm{Re}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

(4) $\mathrm{Im}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

$\boxed{4}$　次の曲線を描け．また（別の図に）曲線の写像 $z \mapsto 1/z$ による像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 0.5, 1, 2, 3$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pi/4, \pi/3, -\pi/2.$

(3) $\mathrm{Re}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

(4) $\mathrm{Im}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

$\boxed{5}$　次の写像が等角でない点を求めよ．

(1) $f(z) = z^3 - z$

(2) $f(z) = \sin z.$

また，それらの点を通る曲線の間の角度を考えることで具体的に等角でないことを示せ．

★ 教科書の 1.5 節の節末問題 (p31) 1 19

数学２Ｂ　　練習問題　　No.5

$\boxed{1}$　関数 $f(z) = \sqrt{z}$ による次の曲線の像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 0.5, 1, 2, 3$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pi/4, \pi/3, -\pi/2.$

(3) $\mathrm{Re}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

(4) $\mathrm{Im}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

$\boxed{2}$　指数関数 $f(z) = e^z$ による次の曲線（直線）の像を求めよ．

(1) $\mathrm{Re}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

(2) $\mathrm{Im}(z) = 0, \pm\pi/4, \pm\pi/2.$

より一般に直線 $\mathrm{Re}(z) = r$, $\mathrm{Im}(z) = s$ の像はどのような曲線になるか．

$\boxed{3}$　対数関数 $f(z) = \ln(z)$ による次の直線の像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 0.5, 1, 2, 3$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pi/4, \pi/3, -\pi/2.$

$\boxed{4}$　べき関数 $f(z) = z^{-1}$ による次の直線の像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 1/2, 1, 2$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pm\pi/4, \pm\pi/2.$

$\boxed{5}$　一般べき関数 $f(z) = z^i$ による次の直線の像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 1/2, 1, 2$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pm\pi/4, \pm\pi/2.$

★ 教科書の 1.6 節の節末問題 (p36) 1 19（特に 16 19）, 1.8 節の節末問題 (p46) 16 19 のうち少なくとも奇数番号の答えのある問題をやっておくこと．(いくつかは上の問題に含まれている．)

数学２B　　練習問題　　No.6

$\boxed{1}$ 次の事柄について説明せよ.

(1) １次分数変換と拡張された複素平面（リーマン球面）

(2) 与えられた３点を別の与えられた３点に移す１次分数変換の存在

(3) 円円対応

$\boxed{2}$ 三角関数 $\sin(z)$ による次の領域の像を求めよ.

(1) $D = \{x + iy \mid |x| \leq \pi/4\}$,

(2) $D = \{x + iy \mid |y| \leq 1, |x| \leq \pi/2\}$

$\boxed{3}$ 双曲線関数 $\sinh(z)$ による次の領域の像を求めよ.

(1) $D = \{x + iy \mid |y| \leq \pi/4\}$,

(2) $D = \{x + iy \mid |x| \leq 1, |y| \leq \pi/2\}$

（ヒント: $\sinh(z) = -i \cdot \sin(iz)$）

$\boxed{4}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $ad - bc \neq 0$ なるものに対して一次分数変換を

$$L_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

で定める．次の関係を確かめよ．（E は単位行列, Id は恒等写像を表す.）

$$L_A \circ L_B = L_{AB}, \qquad L_E = \mathrm{Id}, \qquad (L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$$

$\boxed{5}$ 一次分数変換 $L(z) = (z - i)/(z + i)$ について，$L(i)$, $L(-i)$, $L(\infty)$ を求めよ.

$\boxed{6}$ 次の条件をみたす一次分数変換を求めよ.

(1) $L(0) = 1$, $L(1) = \infty$, $L(\infty) = 0$.

(2) $L(0) = i$, $L(1) = -1$, $L(\infty) = -i$.

★ 教科書の 1.7 節の節末問題 (p41) 1 19（特に 14 19）, 1.8 節の節末問題 (p54) 7 14

数学２Ｂ　　練習問題　　No.7

$\boxed{1}$　次の条件で定まる図形は（一般化された）円であることを示せ．

$$\left|\frac{az+b}{cz+d}\right| = 1, \qquad (a, b, c, d \text{ は } ad - bc \neq 0 \text{ をみたす定数．})$$

$\boxed{2}$　関数 $f(z) = (z - i)/(z + i)$ による３点 $0, 1$ および ∞ の像および実軸 $\mathbb{R}$ の像を求めよ．

$\boxed{3}$　関数 $f(z) = 1/z$ による次の集合の像を求めよ．

(1) 実軸と無限遠点 ∞,

(2) 直線 $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Re}(z) = -1$,

(3) $\mathrm{Re}(z) > 1$ で定まる領域．

$\boxed{4}$　$f(z) = (z - i)/(z + i)$ による次の図形の像を求めよ．

(1)　直線 $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Re}(z) = -1$,

(2)　直線 $\mathrm{Im}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = -1$,

(3) 原点を通る直線群．

$\boxed{5}$　$f(z) = (z + 1)/(z - 1)$ による次の図形の像を求めよ．

(1)　円 $|z| = 1$,

(2) 直線 $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Re}(z) = \pm 1$.

$\boxed{6}$　$f(z) = (z + 1)/(z + 2)$ による次の図形の像を求めよ．

(1)　円 $|z| = 1$,

(2) 直線 $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Re}(z) = \pm 1$.

$\boxed{7}$　$f(z) = (az + b)/(cz + d)$（a, b, c, d は実数で $ad - bc > 0$）は上半平面を上半平面に移すことを示せ．

$\boxed{8}$　$f(z) = e^{i\theta}(z - \alpha)/(\overline{\alpha}z - 1)$（$|\alpha| < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$）は単位円板 $|z| < 1$ をそれ自身に移すことを示せ．