数学２B　　練習問題　　No.4

$\boxed{1}$　次の事柄について説明せよ．

(1) 等角写像の定義

(2) 解析関数と等角写像，調和関数の関係

$\boxed{2}$　次を示せ．

(1) 解析関数 $f(z)$ が臨界点 ($f'(z) = 0$ なる点）以外で等角であること．

(2) 調和関数 $\varphi(z)$ と解析関数 $f(z)$ の合成 $\varphi(f(z))$ が調和関数であること．

$\boxed{3}$　次の曲線を描け．また（別の図に）曲線の写像 $z \mapsto z^2$ による像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 1, 2, 3.$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pi/4, \pi/3, -\pi/2.$

(3) $\mathrm{Re}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

(4) $\mathrm{Im}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

$\boxed{4}$　次の曲線を描け．また（別の図に）曲線の写像 $z \mapsto 1/z$ による像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 0.5, 1, 2, 3$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pi/4, \pi/3, -\pi/2.$

(3) $\mathrm{Re}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

(4) $\mathrm{Im}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

$\boxed{5}$　次の写像が等角でない点を求めよ．

(1) $f(z) = z^3 - z$

(2) $f(z) = \sin z.$

また，それらの点を通る曲線の間の角度を考えることで具体的に等角でないことを示せ．

★ 教科書の 1.5 節の節末問題 (p31) 1 19

数学２B　　練習問題　　No.5

$\boxed{1}$　関数 $f(z) = \sqrt{z}$ による次の曲線の像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 0.5, 1, 2, 3$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pi/4, \pi/3, -\pi/2$.

(3) $\mathrm{Re}(z) = 0, \pm1, \pm2$.

(4) $\mathrm{Im}(z) = 0, \pm1, \pm2$.

$\boxed{2}$　指数関数 $f(z) = e^z$ による次の曲線（直線）の像を求めよ．

(1) $\mathrm{Re}(z) = 0, \pm1, \pm2$.

(2) $\mathrm{Im}(z) = 0, \pm\pi/4, \pm\pi/2$.

より一般に直線 $\mathrm{Re}(z) = r$, $\mathrm{Im}(z) = s$ の像はどのような曲線になるか．

$\boxed{3}$　対数関数 $f(z) = \ln(z)$ による次の直線の像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 0.5, 1, 2, 3$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pi/4, \pi/3, -\pi/2$.

$\boxed{4}$　べき関数 $f(z) = z^{-1}$ による次の直線の像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 1/2, 1, 2$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pm\pi/4, \pm\pi/2$.

$\boxed{5}$　一般べき関数 $f(z) = z^i$ による次の直線の像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 1/2, 1, 2$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pm\pi/4, \pm\pi/2$.

★ 教科書の 1.6 節の節末問題 (p36) 1 19（特に 16 19），1.8 節の節末問題 (p46) 16 19 のうち少なくとも奇数番号の答えのある問題をやっておくこと．(いくつかは上の問題に含まれている．)

数学２B　　練習問題　　No.6

$\boxed{1}$ 次の事柄について説明せよ．

(1) １次分数変換と拡張された複素平面（リーマン球面）

(2) 与えられた３点を別の与えられた３点に移す１次分数変換の存在

(3) 円円対応

$\boxed{2}$ 三角関数 $\sin(z)$ による次の領域の像を求めよ．

(1) $D = \{x + iy \mid |x| \leq \pi/4\}$,

(2) $D = \{x + iy \mid |y| \leq 1, |x| \leq \pi/2\}$

$\boxed{3}$ 双曲線関数 $\sinh(z)$ による次の領域の像を求めよ．

(1) $D = \{x + iy \mid |y| \leq \pi/4\}$,

(2) $D = \{x + iy \mid |x| \leq 1, |y| \leq \pi/2\}$

（ヒント: $\sinh(z) = -i \cdot \sin(iz)$）

$\boxed{4}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $ad - bc \neq 0$ なるものに対して一次分数変換を

$$L_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

で定める．次の関係を確かめよ．（E は単位行列, Id は恒等写像を表す.）

$$L_A \circ L_B = L_{AB}, \qquad L_E = \mathrm{Id}, \qquad (L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$$

$\boxed{5}$ 一次分数変換 $L(z) = (z - i)/(z + i)$ について，$L(i)$, $L(-i)$, $L(\infty)$ を求めよ．

$\boxed{6}$ 次の条件をみたす一次分数変換を求めよ．

(1) $L(0) = 1$, $L(1) = \infty$, $L(\infty) = 0$.

(2) $L(0) = i$, $L(1) = -1$, $L(\infty) = -i$.

★ 教科書の 1.7 節の節末問題 (p41) 1 19（特に 14 19）, 1.8 節の節末問題 (p54) 7 14

数学２B　　練習問題　　No.7

$\boxed{1}$　次の条件で定まる図形は（一般化された）円であることを示せ．

$$\left|\frac{az+b}{cz+d}\right| = 1, \qquad (a, b, c, d \text{ は } ad - bc \neq 0 \text{ をみたす定数．})$$

$\boxed{2}$　関数 $f(z) = (z-i)/(z+i)$ による３点 $0, 1$ および ∞ の像および実軸 $\mathbb{R}$ の像を求めよ．

$\boxed{3}$　関数 $f(z) = 1/z$ による次の集合の像を求めよ．

(1) 実軸と無限遠点 ∞,

(2) 直線 $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Re}(z) = -1$,

(3) $\mathrm{Re}(z) > 1$ で定まる領域．

$\boxed{4}$　$f(z) = (z-i)/(z+i)$ による次の図形の像を求めよ．

(1)　直線 $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Re}(z) = -1$,

(2)　直線 $\mathrm{Im}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = -1$,

(3) 原点を通る直線群．

$\boxed{5}$　$f(z) = (z+1)/(z-1)$ による次の図形の像を求めよ．

(1)　円 $|z| = 1$,

(2) 直線 $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Re}(z) = \pm 1$.

$\boxed{6}$　$f(z) = (z+1)/(z+2)$ による次の図形の像を求めよ．

(1)　円 $|z| = 1$,

(2) 直線 $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Re}(z) = \pm 1$.

$\boxed{7}$　$f(z) = (az+b)/(cz+d)$（a, b, c, d は実数で $ad - bc > 0$）は上半平面を上半平面に移すことを示せ．

$\boxed{8}$　$f(z) = e^{i\theta}(z-\alpha)/(\overline{\alpha}z - 1)$（$|\alpha| < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$）は単位円板 $|z| < 1$ をそれ自身に移すことを示せ．