数学２Ｂ　　練習問題　　No.5　　(5/16,23)

$\boxed{1}$　関数 $f(z)=\sqrt{z}$ による次の曲線の像を求めよ.

(1) $\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)$, $r=0.5,1,2,3$

(2) $\gamma(t)=(t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta=1,\pi/4,\pi/3,-\pi/2.$

(3) $\mathrm{Re}(z)=0,\pm1,\pm2.$

(4) $\mathrm{Im}(z)=0,\pm1,\pm2.$

$\boxed{2}$　指数関数 $f(z)=e^z$ による次の曲線（直線）の像を求めよ.

(1) $\mathrm{Re}(z)=0,\pm1,\pm2.$

(2) $\mathrm{Im}(z)=0,\pm\pi/4,\pm\pi/2.$

より一般に直線 $\mathrm{Re}(z)=r$, $\mathrm{Im}(z)=s$ の像はどのような曲線になるか.

$\boxed{3}$　対数関数 $f(z)=\ln(z)$ による次の直線の像を求めよ.

(1) $\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)$, $r=0.5,1,2,3$

(2) $\gamma(t)=(t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta=1,\pi/4,\pi/3,-\pi/2.$

$\boxed{4}$　べき関数 $f(z)=z^{-1}$ による次の直線の像を求めよ.

(1) $\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)$, $r=1/2,1,2$

(2) $\gamma(t)=(t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta=1,\pm\pi/4,\pm\pi/2.$

$\boxed{5}$　一般べき関数 $f(z)=z^i$ による次の直線の像を求めよ.

(1) $\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)$, $r=1/2,1,2$

(2) $\gamma(t)=(t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta=1,\pm\pi/4,\pm\pi/2.$

★ 教科書の 1.6 節の節末問題 (p36) 1 19（特に 16 19）, 1.8 節の節末問題 (p46) 16 19 のうち少なくとも奇数番号の答えのある問題をやっておくこと.（いくつかは上の問題に含まれている.）

数学２Ｂ　　練習問題　　No.6　　(5/30)

$\boxed{1}$ 次の事柄について説明せよ．

(1) １次分数変換と拡張された複素平面（リーマン球面）

(2) 与えられた３点を別の与えられた３点に移す１次分数変換の存在

(3) 円円対応

$\boxed{2}$ 三角関数 $\sin(z)$ による次の領域の像を求めよ．

(1) $D = \{x + iy \mid |x| \le \pi/4\}$,

(2) $D = \{x + iy \mid |y| \le 1, |x| \le \pi/2\}$

$\boxed{3}$ 双曲線関数 $\sinh(z)$ による次の領域の像を求めよ．

(1) $D = \{x + iy \mid |y| \le \pi/4\}$,

(2) $D = \{x + iy \mid |x| \le 1, |y| \le \pi/2\}$

（ヒント: $\sinh(z) = -i \cdot \sin(iz)$）

$\boxed{4}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $ad - bc \ne 0$ なるものに対して一次分数変換を

$$L_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

で定める．次の関係を確かめよ．(E は単位行列, Id は恒等写像を表す.)

$$L_A \circ L_B = L_{AB}, \qquad L_E = \mathrm{Id}, \qquad (L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$$

$\boxed{5}$ 一次分数変換 $L(z) = (z - i)/(z + i)$ について，$L(i)$, $L(-i)$, $L(\infty)$ を求めよ．

$\boxed{6}$ 次の条件をみたす一次分数変換を求めよ．

(1) $L(0) = 1$, $L(1) = \infty$, $L(\infty) = 0$.

(2) $L(0) = i$, $L(1) = -1$, $L(\infty) = -i$.

★ 教科書の 1.7 節の節末問題 (p41) 1 19（特に 14 19）, 1.8 節の節末問題 (p54) 7 14