数学２B　　練習問題　　No.3　　(4/27)

$\boxed{1}$　次の事柄について説明せよ．

(1) 複素変数の関数が解析的（正則）であることの定義とコーシー・リーマンの関係式（方程式）

(2) 解析関数と調和関数の関係と共役調和関数

$\boxed{2}$　次を示せ．

(1) コーシー・リーマンの関係式から解析関数の実部，虚部が調和関数になること

(2) u が調和関数で v が u の共役調和関数であるとき，u は $-v$ の共役調和関数であること．

$\boxed{3}$　正則関数 $f(z)$ を極座標 (r,θ) を用いて

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta), \quad z = re^{i\theta}$$

と表すとき，コーシー・リーマンの関係式は

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta, \qquad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$$

と表されることを示せ．(教科書 p25 参照)

$\boxed{4}$　$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が解析関数であるとき，次を示せ．

$$f'(z) = u_x - iu_y = v_u + iv_x$$

$\boxed{5}$　調和関数 $u(x,y)$ に対して，共役調和関数 $v(x.y)$ を求める方法を説明し，次の場合に共役調和関数を求めよ．また，対応する解析関数を求めよ．

(1) $x^2 - y^2$

(2) $e^x \cos y$

(3) $\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$\boxed{6}$　与えられた関数が調和関数であるように a, b を定め，共役調和関数を求めよ．

(1) $u = ax^3 + xy^2.$

(2) $u = e^{ax}\cos y.$

★ 教科書の１．４節の節末問題 (p27) 1 12, 17 28 のうち少なくとも奇数番号の答えのある問題をやっておくこと．(いくつかは上の問題に含まれている．)

数学２B　練習問題　No.4　(5/18)

$\boxed{1}$　次の事柄について説明せよ．

(1) 等角写像の定義

(2) 解析関数と等角写像，調和関数の関係

$\boxed{2}$　次を示せ．

(1) 解析関数 $f(z)$ が臨界点 ($f'(z) = 0$ なる点) 以外で等角であること．

(2) 調和関数 $\varphi(z)$ と解析関数 $f(z)$ の合成 $\varphi(f(z))$ が調和関数であること．

$\boxed{3}$　次の曲線を描け．また（別の図に）曲線の写像 $z \mapsto z^2$ による像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 1, 2, 3.$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pi/4, \pi/3, -\pi/2.$

(3) $\mathrm{Re}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

(4) $\mathrm{Im}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

$\boxed{4}$　次の曲線を描け．また（別の図に）曲線の写像 $z \mapsto 1/z$ による像を求めよ．

(1) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r = 0.5, 1, 2, 3$

(2) $\gamma(t) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta = 1, \pi/4, \pi/3, -\pi/2.$

(3) $\mathrm{Re}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

(4) $\mathrm{Im}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

$\boxed{5}$　次の写像が等角でない点を求めよ．

(1) $f(z) = z^3 - z$

(2) $f(z) = \sin z.$

また，それらの点を通る曲線の間の角度を考えることで具体的に等角でないことを示せ．

★ 教科書の 1.5 節の節末問題 (p31) 1 19 のうち少なくとも奇数番号の答えのある問題をやっておくこと．(いくつかは上の問題に含まれている．)

数学２B　　練習問題　　No.5　　(5/25)

$\boxed{1}$　関数 $f(z)=\sqrt{z}$ による次の曲線の像を求めよ.

(1) $\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)$, $r=0.5,1,2,3$

(2) $\gamma(t)=(t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta=1,\pi/4,\pi/3,-\pi/2$.

(3) $\mathrm{Re}(z)=0,\pm1,\pm2$.

(4) $\mathrm{Im}(z)=0,\pm1,\pm2$.

$\boxed{2}$　指数関数 $f(z)=e^z$ による次の曲線（直線）の像を求めよ.

(1) $\mathrm{Re}(z)=0,\pm1,\pm2$.

(2) $\mathrm{Im}(z)=0,\pm\pi/4,\pm\pi/2$.

より一般に直線 $\mathrm{Re}(z)=r$, $\mathrm{Im}(z)=s$ の像はどのような曲線になるか.

$\boxed{3}$　対数関数 $f(z)=\ln(z)$ による次の直線の像を求めよ.

(1) $\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)$, $r=0.5,1,2,3$

(2) $\gamma(t)=(t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta=1,\pi/4,\pi/3,-\pi/2$.

$\boxed{4}$　一般べき関数 $f(z)=z^i$ による次の直線の像を求めよ.

(1) $\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)$, $r=1/2,1,2$

(2) $\gamma(t)=(t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta=1,\pm\pi/4,\pm\pi/2$.

$\boxed{5}$　一般べき関数 $f(z)=z^i$ による次の直線の像を求めよ.

(1) $\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)$, $r=1/2,1,2$

(2) $\gamma(t)=(t\cos\theta, t\sin\theta)$, $\theta=1,\pm\pi/4,\pm\pi/2$.

★ 教科書の 1.6 節の節末問題 (p36) 1 19（特に 16 19）, 1.8 節の節末問題 (p46) 16 19 のうち少なくとも奇数番号の答えのある問題をやっておくこと.（いくつかは上の問題に含まれている.）