# 実数の性質に関する補足２

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai)　　九州大学 (Kyushu University)

**Abstract**

教科書 (黒田) の実数の性質に関する説明に補足をします。（２）

## 1　$n$ 乗根

定理 2.11(p50) の証明を復習する。

**定理 1.1.** $a > 0$ と自然数 $n$ に対して、$b^n = a$ となる $b > 0$ が存在する。

$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ を $f(x) = x^n$ と定義する。このとき、

**補題 1.2.** $f$ は単調増加。すなわち $b < c$ ならば $f(b) < f(c)$ である。

*Proof.* $0 < b < c$ とする。$n$ に関する数学的帰納法で $b^n < c^n$ を示す。$n = 1$ ならば仮定そのままで OK。$n \geq 1$ の時に $b^n < c^n$ が成り立つとすると、$b^{n+1} = bb^n < bc^n < cc^n = c^{n+1}$. □

**補題 1.3.** 単調増加関数は単射。

$a > 0$ を一つ固定する。$B := \{x \in [0, \infty) \mid f(x) \leq a\}$ と定義する。

**補題 1.4.** $\max(1, a)$ は $B$ の上界である。特に $B$ は上に有界。

*Proof.* 教科書通り、$a > 1$, $0 < a \leq 1$ で場合分けする。$0 < a \leq 1$ の時、$x \in B$ ならば $x \leq 1$ なので $1$ は $B$ の上界。$a > 1$ の時、$x \in B$ ならば $x^n \leq a \leq a^n$ より $x \leq a$ なので $a$ は $B$ の上界。 □

$b := \sup B$ とする。$f(b) = a$ を示せばよい[1]。ところが $f(b) = 1$ を直接示すことができないので、$f(b) \leq a$ と $f(b) \geq a$ の両方を示すことで $f(b) = a$ を示す、という間接的な方法をとる。

そのために、このとき、次のような 2 つの数列 $\{b_k\}, \{c_k\}$ を考える。まず、定理 2.10 を用いると $b_k \in B$ かつ $b = \lim_{k\to\infty} b_k$ なる数列が存在する。次に $c_k := b + \frac{1}{k}$ と定義する。上限の定義 (U1) の対偶より「$x > b$ ならば $x \notin B$」である。したがって、$c_k \notin B$ かつ、$b = \lim_{k\to\infty} c_k$ である。まとめると、

- $b = \lim_{k\to\infty} b_k,\ \ f(b_k) \leq a.$
- $b = \lim_{k\to\infty} c_k,\ \ f(c_k) > a$

[1] $b$ が、目的とする「$a$ の $n$ 乗根」となる。

という数列が準備できた。

**補題 1.5.** $f(b) \leq a$.

*Proof.* 数列 $\{b_k\}$ を使う。$b = \lim_{k\to\infty} b_k$ の両辺に $f$ を施して

$$f(b) = f(\lim_{k\to\infty} b_k) = \lim_{k\to\infty} f(b_k)$$

となる。なお 2 つ目の等号では (2.37) を使った。$f(b_k) \leq a$ なので、定理 2.9(ii) より $f(b) \leq a$。 □

**補題 1.6.** $f(b) \geq a$.

*Proof.* 数列 $\{c_k\}$ を使う。$b = \lim_{k\to\infty} c_k$ の両辺に $f$ を施して

$$f(b) = f(\lim_{k\to\infty} c_k) = \lim_{k\to\infty} f(c_k)$$

となる。なお 2 つ目の等号では (2.37) を使った。$f(c_k) \geq a$ なので、定理 2.9(ii) より $f(b) \geq a$。 □

上記の 2 つの補題 1.5 と補題 1.6 は全く同じ証明であることに気がつくと理解しやすい。
この 2 つの補題を合わせると $f(b) = a$ となる。すなわち、$b$ が $a$ の $n$ 乗根である。

# 2　アルキメデスの原理

## 2.1　条件の間の関係を整理する

以下の 4 条件を考える。

(i) $\lim a_n = +\infty$.
(ii) $\lim 1/a_n = 0$.
(iii) $\exists N$, $\forall n > N$, $a_n > 0$.
(iii') 有限個の項を除いて $a_n > 0$.
(iv) $\forall n$, $a_n > 0$.

相互の関係は、

(i) と 「(ii) かつ (iii)」は同値。
(iii) ならば (iv).
(iv) の条件のもとで (i) と (ii) は同値。
(i) の定義はもちろん、$\forall R > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ such that $a_n > R$.
(iii) と (iii') は同値[2]。

[2] $\varepsilon$-$N$ 論法を使うときに、自然数の方も $n > N$ と書くけれど、自然数の大小は実は本質ではない。その条件 $n > N$ は、「有限個の例外を除いて」という条件に他ならない。キーワードは「補有限位相」。

## 2.2 $\lim a_n = +\infty$ なる数列と、和・スカラー倍・はさみうち

**補題 2.1.** *(i)* $c \in \mathbb{R}, \lim a_n = +\infty$ ならば $\lim(a_n + c) = +\infty$.

*(ii)* $c > 0, \lim a_n = +\infty$ ならば $\lim ca_n = +\infty$.

*(iii)* $a_n \geq b_n$ で $\lim b_n = +\infty$ ならば $\lim a_n = +\infty$.

*(iv)* $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

## 2.3 応用

まずは極限とは関係のない不等式から。

**補題 2.2.** $c > 0$ と自然数 $n$ に対して、

*(i)* $(1+c)^n \geq 1 + nc$.

*(ii)* $1 + \frac{c}{n} \geq (1+c)^{1/n} > 1$.

*Proof.* (i) は $n$ に関する数学的帰納法。(ii) は (i) の $c$ に $c/n$ を代入すると $(1+\frac{c}{n})^n \geq 1 + c > 1$ が得られる。この式の $n$ 乗根をとれば、単調性より、結論 $1 + \frac{c}{n} \geq (1+c)^{1/n} > 1$ を得る。 □

**補題 2.3.** *(i)* $\lim_{n\to\infty} (1+c)^n = +\infty$.

*(ii)* $\lim_{n\to\infty} (1+c)^{1/n} = 1$.

*Proof.* (i) 補題 2.1 の (i)(ii)(iv) より $\lim(1+nc) = +\infty$. 補題 2.2(i) より目的の式を得る。
(ii) 補題 2.2(ii) と普通のはさみうち定理 2.9(iii)。 □

## 2.4

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ の証明 (廣島先生の講義の証明) を復習する。p53, 例 2.13(i) とは異なる証明である。

*Proof.* $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$ とする。$n \geq 1$ なので単調性より $n^{1/n} \geq 1^{1/n} = 1$. すなわち $a_n > 0$ である。$\lim a_n = 0$ を示すことが目標である。2 項定理を用いて、

$$n = (1+a_n)^n \geq 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 > \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$$

なので、$n \geq 2$ に対して $a_n^2 < \frac{2}{n-1}$ すなわち、

$$0 < a_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \qquad (n \geq 2)$$

である。ここで $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ なので、はさみうちの原理 (定理 2.9(iii)) より $\lim a_n = 0$ が示せた。 □

ところで教科書だと $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ はどこで証明してあるんだろう？

**補題 2.4.** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

*Proof.* アルキメデスの原理より、$\forall \varepsilon > 0, \exists N > \frac{1}{\varepsilon^2}$. $\forall n > N, n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ なので $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. □