

行列の積, 行列のブロックの練習問題3

version: May 23, 2020; 暫定版、作成中

課題の目標：行列の積に関する問題です。2次とは限らない行列の計算で、行列の積の計算に慣れよう。行列のブロックへの分割を使いこなせるようになるろう。

—— 2次の正方行列よりもサイズの大きな行列の積の練習 ——

定義：行列単位 (教科書 p140)

i, j を $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ となるような自然数とする。 $m \times n$ 行列で、 (i, j) 成分が1であり、そのほかの成分は全て0であるような行列を行列単位といい、 E_{ij} と書く。

例えば、3次正方行列では

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

51 $i \neq j$ とスカラー c に対して、ここだけの記号で、3次正方行列 $P_{ij}, Q_i(c), R_{ij}(c)$ を次のように定義する。

$$P_{ij} = E + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj},$$

$$Q_i(c) = E + (c-1)E_{ii},$$

$$R_{ij}(c) = E + cE_{ij}.$$

(1) $P_{12}, P_{13}, P_{23}, Q_3(c), R_{21}(c), R_{31}(c)$ を書け。

(2) $P_{ij}^2 = E$ を示せ。

(3) $Q_i(x)Q_i(y) = Q_i(xy)$ を示せ。

(4) $R_{ij}(x)R_{ij}(y) = R_{ij}(x+y)$ を示せ。

(5) $P_{ij}^{-1} = P_{ij}, Q_i(c)^{-1} = Q_i(\frac{1}{c}), R_{ij}(c)^{-1} = R_{ij}(-c)$ を示せ。

52 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -5 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix},$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ と定める。}$$

- (1) $R_{31}(1)R_{21}(-2)A_1, Q_3(\frac{1}{3})A_2, P_{23}A_3, R_{32}(-1)A_4, Q_3(-\frac{1}{6})A_5, R_{23}(-1)R_{13}(-2)A_6$ を求めよ。
- (2) A_7 を A_1 と P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。
- (3) A_1 を A_7 と P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

53 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ と定める。}$$

- (1) $R_{31}(-1)R_{21}(-2)A_1, R_{23}(1)R_{13}(-1)A_2, Q_2(-1)A_3, R_{12}(-2)A_4$ を求めよ。
- (2) A_5 を A_1 と P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。
- (3) A_1 を A_5 と P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。
- (4) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とする。行列 A^{-1} を P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。
- (5) 行列 A を P, Q, R たちを (たくさん) 使って表せ。

54 $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ とする。} P_{ij} \text{ または } Q_i(c) \text{ または } R_{ij}(c) \text{ の形の 2 次正方行列 } B_1 \text{ で } B_1A_1 = A_2 \text{ となるものを求めよ。同様に、} B_2A_2 = A_3, B_3A_3 = A_4, B_4A_4 = A_5 \text{ となるような } B_2, B_3, B_4, B_5 \text{ を求めよ。}$$

55 $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。 P_{ij} または $Q_i(c)$ または $R_{ij}(c)$ の形の 3 次正方行列 B_1 で $B_1 A_1 = A_2$ となるものを求めよ。同様に、 $B_2 A_2 = A_3, B_3 A_3 = A_4, B_4 A_4 = A_5, B_5 A_5 = A_6, B_6 A_6 = A_7, B_7 A_7 = A_8, B_8 A_8 = A_9, B_9 A_9 = A_{10}$ となるような $B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9$ を求めよ。

56 今まで、左から基本行列をかける演算をしてきたけれど、次に右から基本行列をかける演算を扱う。 $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$ とする。 A の第 j 列が \mathbf{a}_j である。次を示せ。

- (1) AP_{ij} は A の第 i 列と第 j 列の入れ替えである。
- (2) $AQ_j(c)$ は A の第 j 列を c 倍したものである。
- (3) $AR_{ij}(c)$ は A の第 j 列に第 i 列の c 倍を足したものである。

$$57 \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

P_{ij} または $Q_i(c)$ または $R_{ij}(c)$ の形の 3 次正方行列 B_1 で $A_1 B_1 = A_2$ となるものを求めよ。同様に $A_2 B_2 = A_3, A_3 B_3 = A_4, A_4 B_4 = A_5, A_5 B_5 = A_6, A_6 B_6 = A_7$ となるような B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 を求めよ。

$$58 \quad A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \text{ とし、 } \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

- (1) $A\mathbf{p}_1$ を求めよ。 $A\mathbf{p}_2$ を求めよ。
- (2) 2 次の正方行列 P を $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2)$ と定義する。(1) の結果を $A\mathbf{p}_1 = P \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$ のように表せ。 $A\mathbf{p}_2 = P \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$ のように表せ。
- (3) 上の (2) の結果をまとめ書きして $AP = PX$ の形に表せ。

$$59 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ に対して、前問 58 と同じ計算を行い、計算結果を } AP = PX \text{ の形に表せ。}$$

$$60 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ とする。 } \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

- (1) $A\mathbf{p}_1$ を求めよ。 $A\mathbf{p}_2$ を求めよ。
 (2) $\mathbf{b} = A\mathbf{p}_3$ を求めよ。
 (3) \mathbf{b} を $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ の 1 次結合で表せ。
 (4) $P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$ とする。上記の (1) と (3) の結果を $AP = PX$ の形に、3 次正方形行列 X を用いて表せ。

————— 特別な行列 —————

60 教科書 p120, 問題 6.2 の 3(1)(2).

61 (1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。積 PQ を求めよ。

(2) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。 P^tP と tPP を求めよ。

(3) $P_{13}P_{14}P_{34}P_{23}P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 を求めよ。

62 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。 A^n を求めよ。

63 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

- (1) AB を計算せよ。
 (2) $AB = E$ となるように x, y, z を a, b, c の式で表せ。
 (3) 上の (2) のように x, y, z を決めた時、 BA を計算せよ。

64 $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。数 $q \neq 0$ に対して、列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ q + q^{-1} \\ q^2 + 1 + q^{-2} \\ q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} \\ q^4 + q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-4} \\ q^5 + q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} + q^{-5} \end{pmatrix}$ と定める。ベクトル $((q + q^{-1})E - L)\mathbf{x}$ を計算せよ。

65 $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とし、 $A = 2E - L$ とする。

(1) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 24 & 16 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 20 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 14 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ とする。 AB, BA を求めよ。

(2) 数 $q \neq 0$ に対して、列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ q + q^{-1} \\ q^2 + 1 + q^{-2} \\ q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} \\ q^4 + q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-4} \\ q^7 + q^5 + q^{-5} + q^{-7} \\ q^6 + q^{-6} \\ -q^7 + q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} - q^{-7} \end{pmatrix}$ と定める。列ベクトル $((q + q^{-1})E - L)\mathbf{x}$ を計算せよ。

27 (viii)(27)の追加問題) A を 2 次の正方行列とする。 $A^2 = E$ を満たす行列を列挙せよ。

120 (1) 行ベクトル \mathbf{a} が「全ての列ベクトル \mathbf{x} に対して $\mathbf{a}\mathbf{x} = 0$ を満たしている」ならば、 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ であることを示せ。

(2) 行列 A が「全ての列ベクトル \mathbf{x} に対して $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たしている」ならば、 $A = O$ であることを示せ。

(3) 行列 A, B が「全ての列ベクトル \mathbf{x} に対して $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ を満たしている」ならば、 $A = B$ であることを示せ。

121 「 $AB = E$ ならば $BA = E$ 」という定理をまだ知らないとする。行列の積が結合則を満たすことは知っているとする。この時、 $AB = E$ かつ $BC = E$ であれば $A = C$ であることを示せ。