

## 行列の積, 行列のブロックの練習問題3

version: May 23, 2020; 暫定版、作成中

課題の目標：行列の積に関する問題です。2次とは限らない行列の計算で、行列の積の計算に慣れよう。行列のブロックへの分割を使いこなせるようになるろう。

—— 2次の正方行列よりもサイズの大きな行列の積の練習 ——

定義：行列単位 (教科書 p140)

$i, j$  を  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  となるような自然数とする。 $m \times n$  行列で、 $(i, j)$  成分が1であり、そのほかの成分は全て0であるような行列を行列単位といい、 $E_{ij}$  と書く。

例えば、3次正方行列では

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

51  $i \neq j$  とスカラー  $c$  に対して、ここだけの記号で、3次正方行列  $P_{ij}, Q_i(c), R_{ij}(c)$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} P_{ij} &= E + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}, \\ Q_i(c) &= E + (c-1)E_{ii}, \\ R_{ij}(c) &= E + cE_{ij}. \end{aligned}$$

- (1)  $P_{12}, P_{13}, P_{23}, Q_3(c), R_{21}(c), R_{31}(c)$  を書け。
- (2)  $P_{ij}^2 = E$  を示せ。
- (3)  $Q_i(x)Q_i(y) = Q_i(xy)$  を示せ。
- (4)  $R_{ij}(x)R_{ij}(y) = R_{ij}(x+y)$  を示せ。
- (5)  $P_{ij}^{-1} = P_{ij}, Q_i(c)^{-1} = Q_i(\frac{1}{c}), R_{ij}(c)^{-1} = R_{ij}(-c)$  を示せ。

52  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -5 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix},$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ と定める。}$$

- (1)  $R_{31}(1)R_{21}(-2)A_1, Q_3(\frac{1}{3})A_2, P_{23}A_3, R_{32}(-1)A_4, Q_3(-\frac{1}{6})A_5, R_{23}(-1)R_{13}(-2)A_6$  を求めよ。
- (2)  $A_7$  を  $A_1$  と  $P, Q, R$  たちを (たくさん) 使って表せ。
- (3)  $A_1$  を  $A_7$  と  $P, Q, R$  たちを (たくさん) 使って表せ。

53  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ と定める。}$$

- (1)  $R_{31}(-1)R_{21}(-2)A_1, R_{23}(1)R_{13}(-1)A_2, Q_2(-1)A_3, R_{12}(-2)A_4$  を求めよ。
- (2)  $A_5$  を  $A_1$  と  $P, Q, R$  たちを (たくさん) 使って表せ。
- (3)  $A_1$  を  $A_5$  と  $P, Q, R$  たちを (たくさん) 使って表せ。
- (4) 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  とする。行列  $A^{-1}$  を  $P, Q, R$  たちを (たくさん) 使って表せ。
- (5) 行列  $A$  を  $P, Q, R$  たちを (たくさん) 使って表せ。

54  $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ とする。} P_{ij} \text{ または } Q_i(c) \text{ または } R_{ij}(c) \text{ の形の 2 次正方行列 } B_1 \text{ で } B_1A_1 = A_2 \text{ となるものを求めよ。同様に、} B_2A_2 = A_3, B_3A_3 = A_4, B_4A_4 = A_5 \text{ となるような } B_2, B_3, B_4, B_5 \text{ を求めよ。}$$

55  $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。  $P_{ij}$  または  $Q_i(c)$  または  $R_{ij}(c)$  の形の 3 次正方形行列  $B_1$  で  $B_1 A_1 = A_2$  となるものを求めよ。同様に、  $B_2 A_2 = A_3, B_3 A_3 = A_4, B_4 A_4 = A_5, B_5 A_5 = A_6, B_6 A_6 = A_7, B_7 A_7 = A_8, B_8 A_8 = A_9, B_9 A_9 = A_{10}$  となるような  $B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9$  を求めよ。

56 今まで、左から基本行列をかける演算をしてきたけれど、次に右から基本行列をかける演算を扱う。  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$  とする。  $A$  の第  $j$  列が  $\mathbf{a}_j$  である。次を示せ。

- (1)  $AP_{ij}$  は  $A$  の第  $i$  列と第  $j$  列の入れ替えである。
- (2)  $AQ_j(c)$  は  $A$  の第  $j$  列を  $c$  倍したものである。
- (3)  $AR_{ij}(c)$  は  $A$  の第  $j$  列に第  $i$  列の  $c$  倍を足したものである。

$$57 \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$P_{ij}$  または  $Q_i(c)$  または  $R_{ij}(c)$  の形の 3 次正方形行列  $B_1$  で  $A_1 B_1 = A_2$  となるものを求めよ。同様に  $A_2 B_2 = A_3, A_3 B_3 = A_4, A_4 B_4 = A_5, A_5 B_5 = A_6, A_6 B_6 = A_7$  となるような  $B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  を求めよ。

$$58 \quad A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \text{ とし、 } \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

- (1)  $A\mathbf{p}_1$  を求めよ。  $A\mathbf{p}_2$  を求めよ。
- (2) 2 次の正方形行列  $P$  を  $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2)$  と定義する。(1) の結果を  $A\mathbf{p}_1 = P \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$  のように表せ。  $A\mathbf{p}_2 = P \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$  のように表せ。
- (3) 上の (2) の結果をまとめ書きして  $AP = PX$  の形に表せ。

$$59 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ に対して、前問 58 と同じ計算を行い、計算結果を } AP = PX \text{ の形に表せ。}$$

$$60 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ とする。 } \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

- (1)  $A\mathbf{p}_1$  を求めよ。 $A\mathbf{p}_2$  を求めよ。  
 (2)  $\mathbf{b} = A\mathbf{p}_3$  を求めよ。  
 (3)  $\mathbf{b}$  を  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  の 1 次結合で表せ。  
 (4)  $P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$  とする。上記の (1) と (3) の結果を  $AP = PX$  の形に、3 次正方形行列  $X$  を用いて表せ。

————— 特別な行列 —————

60 教科書 p120, 問題 6.2 の 3(1)(2).

61 (1)  $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  とする。積  $PQ$  を求めよ。

(2)  $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  とする。 $P^tP$  と  ${}^tPP$  を求めよ。

(3)  $P_{13}P_{14}P_{34}P_{23}P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 を求めよ。

62  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  とする。 $A^n$  を求めよ。

63  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする。

- (1)  $AB$  を計算せよ。  
 (2)  $AB = E$  となるように  $x, y, z$  を  $a, b, c$  の式で表せ。  
 (3) 上の (2) のように  $x, y, z$  を決めた時、 $BA$  を計算せよ。

64  $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  とする。数  $q \neq 0$  に対して、列ベクトル  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ q + q^{-1} \\ q^2 + 1 + q^{-2} \\ q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} \\ q^4 + q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-4} \\ q^5 + q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} + q^{-5} \end{pmatrix}$  と定める。ベクトル  $((q + q^{-1})E - L)\mathbf{x}$  を計算せよ。

65  $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  とし、 $A = 2E - L$  とする。

(1)  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 24 & 16 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 20 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 14 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$  とする。 $AB, BA$  を求めよ。

(2) 数  $q \neq 0$  に対して、列ベクトル  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ q + q^{-1} \\ q^2 + 1 + q^{-2} \\ q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} \\ q^4 + q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-4} \\ q^7 + q^5 + q^{-5} + q^{-7} \\ q^6 + q^{-6} \\ -q^7 + q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} - q^{-7} \end{pmatrix}$  と定める。列ベクトル  $((q + q^{-1})E - L)\mathbf{x}$  を計算せよ。

27 (viii)(27) の追加問題)  $A$  を 2 次の正方行列とする。 $A^2 = E$  を満たす行列を列挙せよ。

120 (1) 行ベクトル  $\mathbf{a}$  が「全ての列ベクトル  $\mathbf{x}$  に対して  $\mathbf{a}\mathbf{x} = 0$  を満たしている」ならば、 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  であることを示せ。

(2) 行列  $A$  が「全ての列ベクトル  $\mathbf{x}$  に対して  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を満たしている」ならば、 $A = O$  であることを示せ。

(3) 行列  $A, B$  が「全ての列ベクトル  $\mathbf{x}$  に対して  $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$  を満たしている」ならば、 $A = B$  であることを示せ。

121 「 $AB = E$  ならば  $BA = E$ 」という定理をまだ知らないとする。行列の積が結合則を満たすことは知っているとする。この時、 $AB = E$  かつ  $BC = E$  であれば  $A = C$  であることを示せ。