

数学演習 IA—4 回目 (行列の階数)

[1] 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

[2] 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

[3] A, B を同じサイズの正方行列とする。 $P \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix}$ を満たすような正則行列 P, Q を求めよ。

[4] ブロック分けされている行列 $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ の階数の評価を考えたい。

(1) A が r 次単位行列の時、 $\text{rank} X \geq r$ であることを示せ。

(2) $A = E(r) = E_{mn}(r)$ の時、 $\text{rank} X \geq r$ であることを示せ。

(3) 一般に、 $\text{rank} X \geq \text{rank} A$ であることを示せ。

- 特に一般に、縦または横にブロック分けされている行列に対して、階数の不等式

$\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \geq \text{rank} A$ や $\text{rank} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \geq \text{rank} A$ なども成り立つ。以下の問題では、これらを自由に用いて良い。

[5] $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank} A + \text{rank} B$ であることを示せ。

[6] (1) $B = E(r) = E_{mn}(r)$ とする。 $\text{rank}(AB) \leq r$ であることを示せ。

(2) 一般の B に対して、 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank} B$ であることを示せ。

学習における技術的なポイント：

行列のブロック分け (1.2.3 節) の実践練習 (状況に応じた適用)。

証明における「帰着」の議論。特殊な場合から一般の場合への移行。

複数の補題などを用意し、組み合わせて証明を書き切る技術。

ヒント：

[5] は、[3] の結果と [4](3) の結果と教科書の例題のどれかを組み合わせる。

[4] (1) 定理 2.4 の証明の前半を参照する。(2) は (1) に帰着する。(3) は (2) に帰着する。

[6] (1) A をうまくブロック分けして、問題 [4] の結果 • を用いる。(2) は (1) に帰着する。