

---

## 微分積分学 B      中間テスト (予備)

---

以下の問いに答えよ (1 問 20 点, 100 点満点)

1 関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  がラプラス方程式

$$\Delta f(x, y) := \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 0$$

をみたすとき, 関数

$$g(x, y) = f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

もラプラス方程式  $\Delta g(x, y) = 0$  を (原点  $(0, 0)$  以外で) みたすことを示せ.

2  $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$  の極値を求めよ.

(極小, 極大の判定もせよ. 考察の過程について説明すること.)

3 2次元平面に3つの点  $P_1, P_2, P_3$  が与えられている. これに対して点  $R$  を

$$\Delta(R) = \overline{RP_1}^2 + \overline{RP_2}^2 + \overline{RP_3}^2 \quad (\overline{RP_k} \text{ は } R \text{ と } P_k \text{ を結ぶ線分の長さ.})$$

が最小になるようにとりたい. 実際に  $\Delta(R)$  がある点で最小値をとることを示し, その点を求めよ.

4  $C^1$  級の写像

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) ヤコビ行列とヤコビ行列式を求めよ.

(2)  $F$  が局所的に  $C^1$  可逆になるような点の全体を求めよ.

5 3変数の関数  $f(x, y, z) = x^3 + x - y^2 + yz - z^2$  について問いに答えよ.

(1) 関係  $f(x, y, z) = 2$  は点  $(x, y, z) = (1, 0, 0)$  の近くで陰関数  $x = g(y, z)$  を定めることを示せ.

(2)  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} g(0, 0)$  を求めよ.